第五章　导数和微分

§1　导数的概念

一、导数的定义

【背景 1】（瞬时速度） 设一质点作直线运动，其运动规律为 $s=s(t)$．若 t_0 为某一确定的时刻，t 为邻近于 t_0 的时刻，则

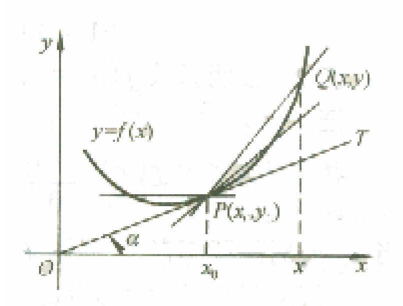
$$\overline{v}=\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

是质点在时间段 $[t_0,t]$(或 $[t,t_0]$)上的平均速度．若 $t\to t_0$ 时平均速度 $\overline{v}$ 的极限存在，则称极限

$$v=\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} \qquad （1）$$

为质点在时刻 t_0 的瞬时速度.

【背景 2】（切线的斜率） 如图所示，曲线 $y=f(x)$ 在其上一点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线 PT 是割线 PQ 当动点 Q 沿此曲线无限接近于点 P 时的极限位置．由于割线 PQ 的斜率为



$$\overline{k}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

因此当 $x\to x_0$ 时如果 $\overline{k}$ 的极限存在，则极限

$$k=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad （2）$$

即为切线 PT 的斜率.

定义 1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{3}$$

存在，则称函数 f **在点 x_0 处可导**，并称该极限为函数 f **在点 x_0 处的导数**，记作 $f'(x_0)$.

令 $x=x_0+\Delta x, \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, 则(3)式可改写为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0). \tag{4}$$

所以，导数是函数增量 Δy 与自变量增量 Δx 之比 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限. 这个增量比称为函数关于自变量的平均变化率(又称**差商**)，而导数 $f'(x_0)$ 则为 f 在 x_0 处关于 x 的**变化率**.

若(3)(或(4))式极限不存在，则称 f **在点 x_0 不可导.**

例 1（自由落体运动）$y=f(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$。求 t 时刻的瞬时速度。

解 $v(t)=f'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt^2}{\Delta t}$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}g(2t+\Delta t)\Delta t}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}g(2t+\Delta t)=gt$$

例 2（教材例 1）求抛物线 $y=f(x)=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程与法线方程.

解 与上例类似

$$f'(x)=2x$$

在点 $(1,1)$ 处的切线斜率为

$$k=f'(1)=2,$$

所以切线方程为：$y-1=2(x-1)$，法线方程为：$y-1=-\dfrac{1}{2}(x-1)$。

例 3（教材例 2） 证明函数 $f(x)=|x|$ 在点 $x_0=0$ 不可导.

证 因为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1, \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 不存在，所以 f 在点 $x=0$ 不可导.

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某右邻域 $[x_0,x_0+\delta)$ 上有定义，若右极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}(0<\Delta x<\delta)$$

存在，则称该极限值为 f 在 x_0 的**右导数**，记作 $f'_+(x_0)$.

类似地，我们可定义**左导数**

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

右导数和左导数统称为**单侧导数**.

例如：在例 3 中，$f'_+(0)=1, f'_-(0)=-1$。

显然

$$f'(x_0)\text{ 存在}\Leftrightarrow f'_+(x_0)\text{ 与 }f'_-(x_0)\text{ 都存在，且 }f'_+(x_0)=f'_-(x_0).$$

设 $f(x)$ 在点 x_0 可导，那么

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)=o(1)(\Delta x\to 0)$$

由 $o(1)\cdot\Delta x=o(\Delta x)$，得

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x). \tag{5}$$

我们称(5)式为 $f(x)$ 在点 x_0 的**有限增量公式**. 注意，此公式对 $\Delta x=0$ 仍旧成立.

类似地有**单侧有限增量公式**:

$$\Delta y=f'_+(x_0)\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0^+)$$

$$\Delta y=f'_-(x_0)\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0^-)$$

定理 1　[习题 5.1:10]　若函数 f 在点 x_0 存在左、右导数，则 f 在点 x_0 连续.

证　由单侧有限增量公式，$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\Delta y=0\Rightarrow\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$。

例如：$f(x)=|x|, f'_+(0)=1, f'_-(0)=-1$，所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续。

推论　若函数 f 在点 x_0 可导，则 f 在点 x_0 连续.

【注】　可导仅是函数在该点连续的充分条件，而不是必要条件.

例如：$f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 连续，但不可导.

例 4　[习题 5.1:4]　（光滑连接问题）设

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\ge 3\\ ax+b, & x<3\end{cases},$$

试确定a,b的值，使 f 在$x=3$处可导。

解 要使 f 在$x=3$处可导，首先 f 在$x=3$处要连续。由$f(3+0)=f(3-0)$得

$$9=3a+b$$

其次还要在$x=3$处左、右导数相等

$$f_+'(3)=2x\big|_{x=3}=6$$

$$f_-'(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{ax+b-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{ax-3a}{x-3}=a$$

由$f_+'(3)=f_-'(3)$得$a=6,b=-9$。

例 5 (教材例 4) 证明函数$f(x)=x^2D(x)$仅在点$x_0=0$可导，其中$D(x)$为狄利克雷函数.

证 当$x_0\ne 0$时，由归结原理可得$f(x)$在点x_0不连续，所以$f(x)$在点$x=x_0$不可导.

当$x_0=0$时，由于$D(x)$为有界函数，因此得到

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}xD(x)=0.$$

例 6 求下面函数在点$x=0$的左右导数。

（1）$f(x)=x^{\frac{1}{3}}, f_+'(0)=f_-'(0)=+\infty$

（2）$f(x)=\sqrt[3]{x^2}, f_+'(0)=+\infty, f_-'(0)=-\infty$

（3）$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, x\ne 0\\ 0, x=0\end{cases}$，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\sin\dfrac{1}{\Delta x}$，$f_+'(0), f_-'(0)$都不存在，

（4）$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, x<0\\ x, x\ge 0\end{cases}$，$f_+'(0)=1, f_-'(0)$不存在。

例 7 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\ne 0\\ 0, x=0\end{cases}$，求$f'(0)$。

解

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

二、导函数

若函数在区间 I 上每一点都可导(对区间端点，仅考虑相应的单侧导数)，则称 f 为 I 上的**可导函数**．此时对每一个 $x\in I$，都有 f 的一个导数 $f'(x)$ (或单侧导数)与之对应．这样就定义了一个在 I 上的函数，称为 f 在 I 上的**导函数**，也简称为**导数**．记作 f',y' 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},x\in I.$$

例 8

1°　$f(x)\equiv c,f'(x)\equiv 0,x\in R$

2°　$f(x)=x^n,f'(x)=nx^{n-1},n\in N_+,x\in R$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}\cdot\Delta x+\cdots+C_n^n\Delta x^{n-1})$$

$$=C_n^1x^{n-1}=nx^{n-1}.$$

3°　$f(x)=\sin x,f'(x)=\cos x,x\in R$

$$\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}),$$

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})=\cos x$$

4°　$f(x)=\cos x,f'(x)=-\sin x,x\in R$

5°　$f(x)=\log_a x,f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e(a>0,a\neq 1)$，$,x>0$。特别地，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

$$\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})=\frac{1}{x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}},$$

$$(\log_a x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\log_a e.$$

三、极值

定义 3　若函数 f 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内对一切 $x\in U(x_0)$ 有

$$f(x_0)\geq f(x)\ (f(x_0)\leq f(x)),$$

则称函数 f 在点 x_0 取得**极大(小)值**，称点 x_0 为**极大(小)值点**. 极大值、极小值统称为**极值**，极大值点、极小值点统称为**极值点**.

还可定义**严格极大（小）值**.

【注】根据定义，对于区间端点不定义极值。

思考　“点 x_0 不是 f 极值点”怎样叙述？

定理 2 (费马(Fermat)定理)　设函数 f 在点 x_0 的某邻域内有定义，且在点 x_0 可导. 若点 x_0 为 f 的极值点，则必有 $f'(x_0)=0.$

证法 1 设 $f'(x_0)\neq 0.$ 不妨 $f'(x_0)>0.$ 则

$$f_+'(x_0)=f_-'(x_0)=f'(x_0)>0$$

由 $f_+'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$ 及保号性可知，

$$\exists\delta_1>0，\ \forall x\in(x_0,x_0+\delta_1)，\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,\ f(x)>f(x_0)$$

同理，由 $f_-'(x_0)>0,$ 可得

$$\exists\delta_2>0，\ \forall x\in(x_0-\delta_2,x_0)，\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,\ f(x)<f(x_0)$$

所以，f 在点 x_0 不取极值，与假设矛盾。

证法 2 设 f 在点 x_0 取极大值。即 $f(x)\leq f(x_0), x\in U(x_0)$。因此

当 $x>x_0$ 时，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$，由保不等式性

$$f_+'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$$

同理又可得，$f'_-(x_0)\ge 0$。由 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$ 得

$$f'(x_0)=0$$

我们称满足方程 $f'(x)=0$ 的点为**稳定点**或**驻点**.

【注 1】当 f 在点 x_0 可导时，$f'(x_0)=0$ 只是 f 在点 x_0 取极值的必要条件。例如 $f(x)=x^3$，点 $x=0$ 是稳定点，但却不是极值点.

【注 2】不可导的点也可能是极值点。如 $y=|x|$ 在点 $x=0$。

§2 求导法则

一、导数的四则运算

定理 1（导数的四则运算法则）

1° $\left[f(x)+g(x)\right]'=f'(x)+g'(x)$

2° $\left[f(x)-g(x)\right]'=f'(x)-g'(x)$

3° $\left[f(x)g(x)\right]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),\quad \left[cf(x)\right]'=cf'(x)$

4° $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2},g(x)\neq 0$

[证明自学]

例 1　设 $f(x)=x^3+5x^2-9x+\pi$，求 $f'(x)$.

解　$f'(x)=(x^3)'+5(x^2)'-9(x)'+(\pi)'=3x^2+10x-9.$

一般地：多项式函数 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}+a_n$

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$$

例 2　证明 $\left(x^{-n}\right)'=-nx^{-n-1}$，其中 n 为正数.

证　$\left(x^{-n}\right)'=\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'=-\dfrac{nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1}.$

例 3

1° $\left(\tan x\right)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\left(\sin x\right)'\cos x-\sin x\left(\cos x\right)'}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

2° $\left(\cot x\right)'=-\csc^2 x.$

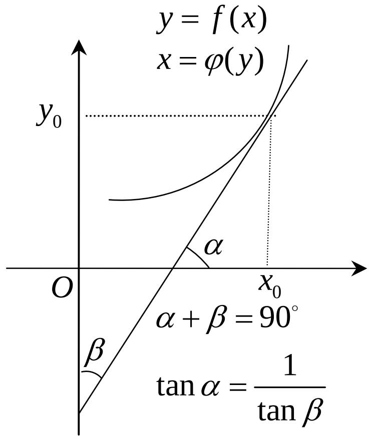
3°　$(\sec x)' = \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = -\dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x$

4°　$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

二、反函数的导数

定理 2　设 $y = f(x)$ 为 $x = \varphi(y)$ 的反函数，若 $\varphi(y)$ 在点 y_0 的某邻域内连续，严格单调且 $\varphi'(y_0) \neq 0$，则 $f(x)$ 在点 $x_0 = \varphi(y_0)$ 可导，且

$$f'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(y_0)}$$



证　$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$\xlongequal[x \to x_0 \Leftrightarrow y \to y_0]{y = f(x)} \lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{\varphi(y) - \varphi(y_0)}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\dfrac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{\varphi'(y_0)}$$

几何意义见图。

【注】这里是用了变量替换法，见复合函数极限定理 1，请读者验证其中的 3 个条件。

例 4

1°　$(a^x)' = a^x \ln a\ (a > 0, a \neq 1)$，$(e^x)' = e^x$.

2°　$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1).$

3°　$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1).$

4°　$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}, x \in (-\infty, +\infty).$

5°　$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}, x \in (-\infty, +\infty).$

证　1°　由于 $y = a^x, x \in R$ 为对数函数 $x = \log_a y$，$y \in (0, +\infty)$ 的反函数，故

$$(a^x)'=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{y}{\log_a e}=a^x\ln a.$$

2° 由于 $y=\arcsin x, x\in(-1,1)$ 是 $x=\sin y, y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 的反函数，故

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(-1,1).$$

4° 由于 $y=\arctan x, x\in R$ 是 $x=\tan y, y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 的函数，因此

$$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}, x\in(-\infty,\infty).$$

三、复合函数的导数

引理　$f(x)$ 在点 x_0 可导的充要条件是：在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上，存在一个在点 x_0 连续的函数 $H(x)$，使得

$$f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0)$$

从而 $f'(x_0)=H(x_0)$.

证　设 $f(x)$ 在点 x_0 可导，令

$$H(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\in U^0(x_0)\\ f'(x_0), & x=x_0\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}H(x)=f'(x_0)=H(x_0)$，所以 $H(x)$ 在点 x_0 连续，且

$$f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0), x\in U(x_0).$$

反之，设存在 $H(x)$，$x\in U(x_0)$，它在点 x_0 连续，且

$$f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0), x\in U(x_0).$$

因存在极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}H(x)=H(x_0)$$

所以 $f(x)$ 点 x_0 可导，且 $f'(x_0)=H(x_0)$.

【注】　引理说明了点 x_0 是函数 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 可去间断点的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 可导.

定理 3（链式法则）设 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 可导，$y=f(u)$ 在点 $u_0=\varphi(x_0)$ 可导，则复合函数 $f\circ\varphi$ 点在 x_0 可导，且

$$(f\circ\varphi)'(x_0)=f'(u_0)\varphi'(x_0)=f'[\varphi(x_0)]\varphi'(x_0)$$

证　由 $f(u)$ 在点 u_0 可导，由引理必要性部分，存在一个在点 u_0 连续的函数 $F(u)$，使得 $f'(u_0)=F(u_0)$ 且

$$f(u)-f(u_0)=F(u)(u-u_0),u\in U(u_0).$$

又由 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 可导，同理存在一个在点 x_0 连续的函数 $\Phi(x)$，使得 $\varphi'(x_0)=\Phi(x_0)$，且

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=\Phi(x)(x-x_0),x\in U(x_0).$$

于是就有

$$f[\varphi(x)]-f[\varphi(x_0)]=F[\varphi(x)][\varphi(x)-\varphi(x_0)]=F[\varphi(x)]\Phi(x)(x-x_0).$$

因为 φ,Φ 在点 x_0 连续, F 在点 $u_0=\varphi(x_0)$ 连续,因此 $H(x)=F[\varphi(x)]\Phi(x)$ 在点 x_0 连续. 由引理充分性部分证得 $f\circ\varphi$ 在点 x_0 可导，且

$$(f\circ\varphi)'(x_0)=H(x_0)=F[\varphi(x_0)]\Phi(x_0)=f'(u_0)\varphi'(x_0).$$

例 5（教材例 7）设 $y=\sin x^2$，求 y'.

解　将 $\sin x^2$ 看作 $y=\sin u$ 与 $u=x^2$ 的复合函数，故

$$(\sin x^2)'=\cos u\cdot 2x=2x\cos x^2.$$

【注】$(\sin x^2)'\neq\cos x^2$.

例 6（教材例 8）设 α 为实数，求幂函数 $y=x^\alpha\ (x>0)$ 的导数.

解　因为 $y=x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$ 可看作 $y=e^u$ 与 $u=\alpha\ln x$ 的复合函数，故

$$(x^{\alpha})'=(e^{\alpha\ln x})'=e^{\alpha\ln x}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

例 7　（教材例 9）设 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$，求 $f'(0)$， $f'(1)$ 。

解　由于

$$f'(x)=(\sqrt{x^2+1})'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

因此 $f'(0)=0, f'(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

例 8　（教材例 10）求下列函数的导函数;

(1)　$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;　　(2)　$f(x)=\tan^2\frac{1}{x}.$

解(1)　$(\ln x+\sqrt{1+x^2}))'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})'$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(2)　$(\tan^2\frac{1}{x})'=2\tan\frac{1}{x}(\tan\frac{1}{x})'=2\tan\frac{1}{x}\sec^2\frac{1}{x}(\frac{1}{x})'=-\frac{2}{x^2}\tan\frac{1}{x}\sec^2\frac{1}{x}.$

例 9（教材例 11）（对数求导法）　设 $y=\dfrac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}\ (x>4)$, 求 y'.

解　先对函数式两边取对数，得

$$\ln y=\ln\frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}=2\ln(x+5)+\frac{1}{3}\ln(x-4)-5\ln(x+2)-\frac{1}{2}\ln(x+4)$$

再对上式两边分别求导数，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3(x-4)}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2(x+4)}$$

整理后得到

$$y'=\frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3(x-4)}-\frac{5}{x+5}-\frac{1}{2(x+4)}\right]$$

例 10　（教材例 12）　设 $y=u(x)^{v(x)}$，其中 $u(x)>0$，且 $u(x)$ 和 $v(x)$ 均可导，试求此

幂指函数的导数.

解法 1　$y'=(u(x)^{v(x)})'=(e^{v(x)\ln u(x)})'=e^{v(x)\ln u(x)}(v(x)\ln u(x))'$

$$=u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

$$=u(x)^{v(x)}v'(x)\ln u(x)+u(x)^{v(x)-1}u'(x)v(x)$$

解法 2　$\ln y=v(x)\ln u(x)$，$\dfrac{y'}{y}=v'(x)\ln u(x)+v(x)\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

例 11　$y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^{x}}}$，求 y'.

解　$\ln y=\dfrac{1}{2}\left[\ln x+\ln\sin x+\dfrac{1}{2}\ln(1-e^{x})\right]$

例 12　$y=\ln(-x), x<0$，求 y'.

解　$y'=\dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x}$, 因此

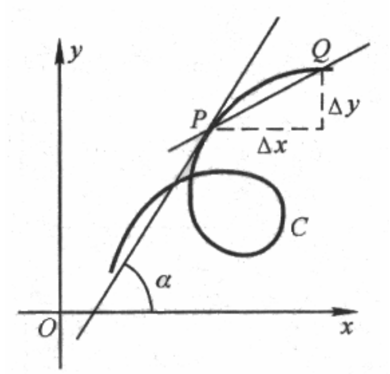
$$\left(\ln|x|\right)'=\frac{1}{x}, x\neq 0$$

§3 参变量函数的导数

平面曲线 C 一般的表达形式是参变量方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta \tag{1}$$

表示．设 $t = t_0$ 对应曲线 C 上的点 P．如果在点 P 有切线，那么切线的斜率可由割线的斜率取极限而得，为此设 $x(t), y(t)$ 在点 t_0 可导，且 $x'(t_0) \ne 0$．若 $t_0 + \Delta t$ 对应 C 上的点 Q (如图)，割线 PQ 的斜率



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}$$

于是曲线 C 在点 P 的切线斜率是

$$\tan\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

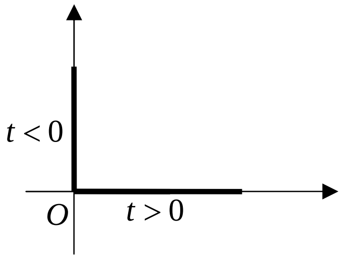
其中 α 为切线与 x 轴正向的夹角．若 $x'(t_0) = 0$，但 $y'(t_0) \ne 0$，同样可得

$$\cot\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{x'(t_0)}{y'(t_0)}.$$

定义　若 $x(t), y(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上都存在连续的导函数，且 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \ne 0$，这时称 C 为**光滑曲线**. 其特点是在曲线 C 上不仅每一点都有切线，且切线与 x 轴正向的夹角 $\alpha(t)$ 是的连续函数.

【注】 $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$，则曲线在 $t = t_0$ 可能有尖点。如

$$x(t) = \begin{cases} t^2, t \le 0 \\ 0, t > 0 \end{cases}, y(t) = \begin{cases} 0, t \le 0 \\ t^2, t > 0 \end{cases}, x'(0) = y'(0) = 0$$



思考 由函数 $y=f(x), x\in[a,b]$ 表示曲线应如何定义光滑曲线？

若 $x=x(t)$ 具有反函数 $t=\varphi(x)$，那么它与 $y=y(t)$ 构成一个复合函数

$$y=y[\varphi(x)]$$

这时只要函数 $x(t), y(t)$ 可导， $x'(t)\neq 0$ （因而当 $\Delta x\to 0$ 时，也有 $\Delta t\to 0$ 和 $\Delta y\to 0$)，就可由复合函数和反函数的求导法则得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt}=\frac{y'(t)}{x'(t)} \qquad (2)$$

例 1 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在点 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 的切线方程。

解 参数方程 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\cos t. \end{cases}$ $t=\frac{\pi}{4}$ 时， $x=\frac{a}{\sqrt{2}}, y=\frac{b}{\sqrt{2}}$

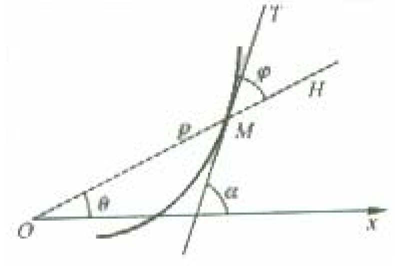
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt}=\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}=-\frac{b}{a}\cot t.$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{b}{a}.$$

切线方程为： $y-\frac{b}{\sqrt{2}}=-\frac{b}{a}(x-\frac{a}{\sqrt{2}})$

若曲线 C 由极坐标 $\rho=\rho(\theta)$ 表示，则可转化为以极角 θ 为参量的参量方程：

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta=\rho(\theta)\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta=\rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$$



这时在相应的条件下可得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\rho(\theta)\sin\theta\right)'}{\left(\rho(\theta)\cos\theta\right)'} \tag{3}$$

(3)式表示在曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 上的点 $M(\rho,\theta)$ 处的切线 MT 与极轴 Ox 轴的夹角的正切(见图).

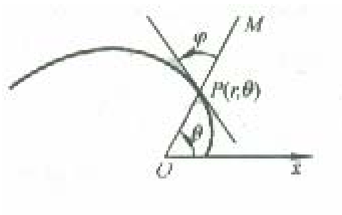
过点 M 的射线 OH 与切线 MT 的夹角的正切则是

$$\tan\varphi=\tan(\alpha-\theta)=\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta} \tag{4}$$

将(3)式代人(4)式则得向径与切线夹角的正切

$$\tan\varphi=\frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} \tag{5}$$

【例 2】 证明：对数螺线 $\rho=e^{\frac{\theta}{2}}$ (如图)点的切线与向径的夹角 φ 为常量.



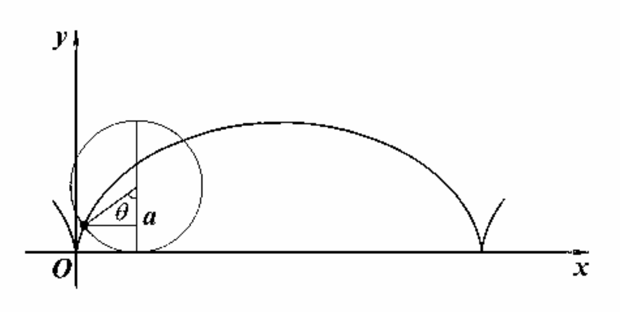
证　由(5)式得，对每一 θ 值都有

$$\tan\varphi=\frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}=\frac{e^{\frac{\theta}{2}}}{\frac{1}{2}e^{\theta/2}}=2$$

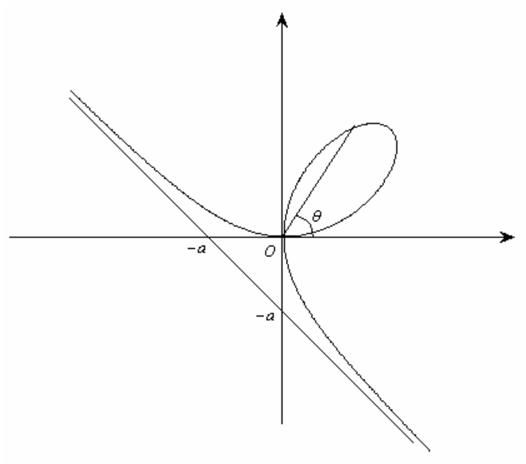
即在对数螺线上任一点的切线与向径的夹角等于 $\arctan 2$.

附：常见的几种曲线

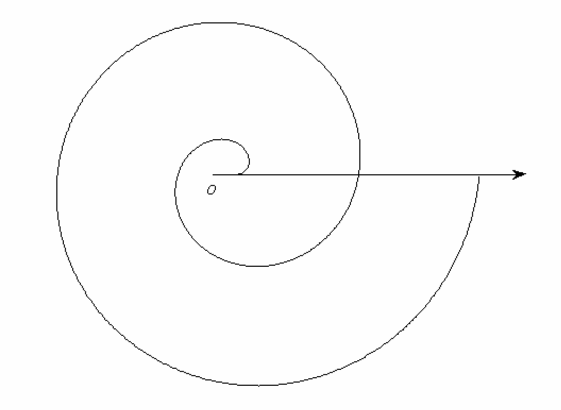
【1】摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ (图中 θ 改为 t)



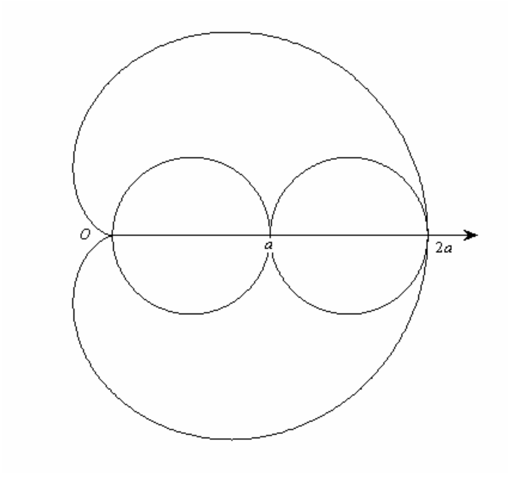
【2】笛卡尔叶形线 $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} (t=\tan\theta, t\neq -1) \Leftrightarrow x^3+y^3-3axy=0$



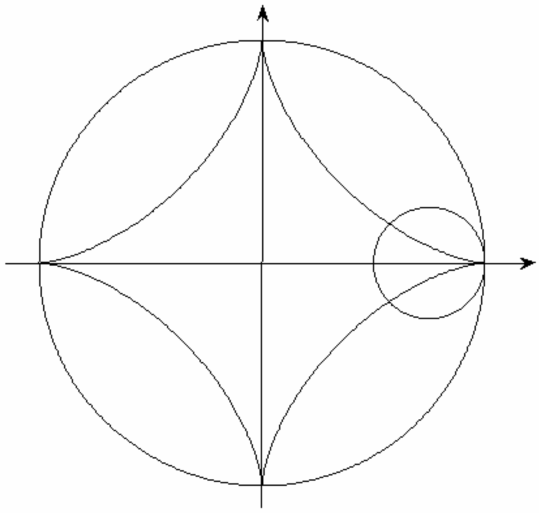
【3】阿基米德螺线 $\rho=a\theta(a>0)$



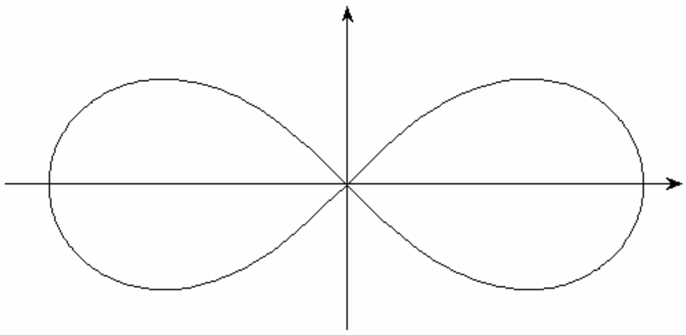
【4】心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)(a>0)$



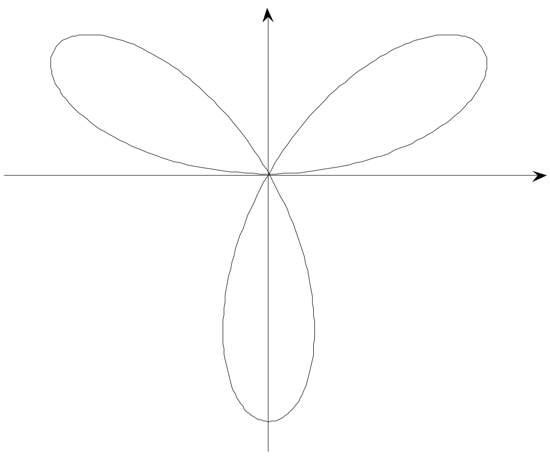
【5】星形线（内摆线）$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \Leftrightarrow x^{3} + y^{3} = a^{\frac{2}{3}}$



【6】双纽线 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta \Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^2 = a^2(x^2-y^2)$



【7】三叶玫瑰线 $\rho = a\sin 3\theta$



§4 高阶导数

定义 1　若函数 f 的导函数 f' 在点 x_0 可导，则称 f' 在点 x_0 的导数为 f 在点 x_0 的**二阶导数**，记作 $f''(x_0)$，即

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$

同时称 f 在点 x_0 为**二阶可导**.

一般地，可由 f 的 $n-1$ 阶导函数定义 f 的 n **阶导函数**(或简称 n **阶导数**)，函数 f 在点 x_0 处的 n 阶导数记作

$$f^{(n)}(x_0),\ y^{(n)}\Big|_{x=x_0}\qquad \text{或}\ \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\bigg|_{x=x_0}$$

例 1 求幂函数 $y=x^n$ （n 为正整数)的各阶导数

解　$y'=nx^{n-1}$， $y''=n(n-1)x^{n-2}$， $\cdots, y^{(n)}=n!,\ y^{(n+1)}=y^{(n+2)}=\cdots=0.$

例 2　求 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的各阶导数.

解　对于 $y=\sin x$，由三角函数的求导公式得

$$y'=\cos x,\ y''=-\sin x,\ y'''=-\cos x,\ y^{(4)}=\sin x\,.$$

可将上述导数改写为

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ y''=-\sin x=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ y^{(4)}=\sin x=\sin\left(x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

一般地，可推得

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),n\in N_+.$$

类似地有

$$\cos^{(n)} x = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), n \in N_+.$$

例 3　求 $y = e^x$ 的各阶导数.

解　$y^{(n)} = e^x, n \in N_+$.

例 4(莱布尼茨公式)

设 $y = uv$，则

$$y' = u'v + uv', y'' = (u'v + uv')' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$y''' = (u''v + 2u'v' + uv'')' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + C_n^1 u^{(n-1)}v^{(1)} + \cdots + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + u^{(0)}v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

其中 $u^{(0)} = u, v^{(0)} = v$

例 5　设 $y = x^2 e^x$，求 $y^{(n)}$.

解　令 $u(x) = e^x$，$v(x) = x^2$. 应用莱布尼茨公式

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} = e^x \sum_{k=0}^{2} C_n^k v^{(k)} = e^x(x^2 + 2nx + n(n-1))$$

例 6　设 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_0]$ 上二阶可导，试选择常数 a, b, c 使得

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \le x_0 \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c, & x > x_0 \end{cases}$$

是二阶可导的。

解　由连续性，$c = f(x_0)$，（以下在 x_0 的导数要用定义求）

由 $F'_-(x_0) = F'_+(x_0)$，$b = f'_-(x_0)$

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x), & x < x_0 \\ f'_-(x_0) & x = x_0 \\ 2a(x-x_0) + f'_-(x_0) & x > x_0 \end{cases}$$

由 $F''_-(x_0) = F''_+(x_0)$，$a = \dfrac{1}{2} f''_-(x_0)$

例 7 [习题 5.4: 11]设

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$$

证明 $f^{(n)}(0)=0\ (n=1,2,\cdots)$ 。

证　$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x-0}\overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{e^{t^2}}=0$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0 \\ 0, \qquad x=0 \end{cases}$$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\lim_{t\to\infty}\frac{2t^4}{e^{t^2}}=0$$

$$f''(x)=\begin{cases} 2p(\frac{1}{x})e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}, x\neq 0 \\ 0, \qquad x=0 \end{cases}，\ p \text{ 是某多项式}$$

$$f'''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\lim_{t\to\infty}\frac{tp(t)}{e^{t^2}}=0$$

一般地， $f^{(n)}(0)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{P(t)}{e^{t^2}}=0$ （$P(t)$ 为某多项式）。

设 $x(t), y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上都是二阶可导，则由参量方程

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}$$

所确定的函数的一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$,它的参量方程是.

$$\begin{cases} x=x(t), \\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)} \end{cases}$$

因此

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'}{x'(t)}=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{\left[x'(t)\right]^3}$$

例 8　试求由摆线参量方程

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$$

所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数.

解
$$\frac{dy}{dx}=\frac{(a(1-\cos t))'}{(a(t-\sin t))'}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\cot\frac{t}{2}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\cot\frac{t}{2}\right)'}{(a(t-\sin t))'}=\frac{-\frac{1}{2}\csc^2\frac{t}{2}}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{4a}\csc^4\frac{t}{2}.$$

§5　微分

一、微分的概念

先考察一个具体问题．设一边长为 x 的正方形，它的面积 $S=x^2$ 是 x 的函数，若边长由 x_0 增加 Δx，相应地正方形面积的增量

$$\Delta S=\left(x+\Delta x\right)^2-{x_0}^2=2x_0\Delta x+\left(\Delta x\right)^2 .$$

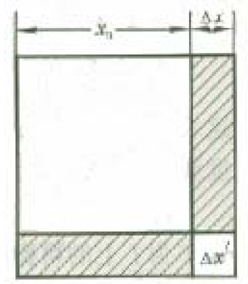


图 5-8

ΔS 由两部分组成：第一部分 $2x_0\Delta x$ (即图 5—8 中的阴影部分)；第二部分 $\left(\Delta x\right)^2$ 是关于 Δx 的高阶无穷小量．由此可见，当给 x_0 一个微小增量 Δx 时，由此引起的正方形面积增量 ΔS 可以近似地用第一部分 (Δx 的线性部分 $2x_0\Delta x$)来代替．由此产生的误差是一个关于 Δx 的高阶无穷小量，也就是以 Δx 为边长的小正方形面积．

定义 1　设函数 $y=f\left(x\right)$ 定义在点 x_0 的某邻域 $U\left(x_0\right)$ 上．当给 x_0 一个增量 Δx，$x_0+\Delta x\in U\left(x_0\right)$ 时，相应地得到函数的增量为

$$\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right).$$

如果存在常数 $A(x_0)$，使得 Δy 能表示成

$$\varDelta y=A(x_0)\varDelta x+o\left(\varDelta x\right), \tag{1}$$

则称函数 f 在点 x_0 **可微**，并称 $\left(1\right)$ 式中的第一项 $A(x_0)\varDelta x$ 为 f 在点 x_0 的**微分**，记作

$$\mathrm{d}\,y\big|_{x=x_0}=A(x_0)\varDelta x \quad 或 \quad \mathrm{d}\,f\left(x\right)\big|_{x=x_0}=A(x_0)\varDelta x . \tag{2}$$

由定义可见，函数的微分与增量仅相差一个关于 Δx 的高阶无穷小量，由于 dy 是 Δx 的线性函数，所以当 $A\neq 0$ 时，也说微分 dy 是增量 Δy 的**线性主部**．

定理 1（可导和可微等价）函数 f 在点 x_0 可微的充要条件是函数 f 在点 x_0 可导，而且(1)式中的 $A(x_0)$ 等于 $f'\left(x_0\right)$．

证　[必要性]　若 f 在点 x_0 可微，由(1)式有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + o(1).$$

取极限后有

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + o(1)\right) = A.$$

这就证明了 f 在点 x_0 可导且导数等于 A.

[充分性]　若 f 在点 x_0 可导，则 f 在点 x_0 的有限增量公式

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

表明函数增量 Δy 可表示为 Δx 的线性部分 $\left(f'(x_0)\Delta x\right)$ 与较 Δx 高阶的无穷小量之和，所以 f 在点 x_0 可微，且有

$$dy\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x.$$

微分的几何解释如图 5-9 所示．当自变量由 x_0 增加到 $x_0 + \Delta x$ 时，函数增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = RQ$，而微分则是在点 P 处的切线上与 Δx 所对应的增量 $dy = f'(x_0)\Delta x = RQ'$，并且

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \lim_{x \to \Delta x} \frac{Q'Q}{PR} = f'(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{Q'Q}{RQ'} = 0,$$

所以当 $f'(x_0) \neq 0$ 时，　$\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{Q'Q}{RQ'} = 0$.

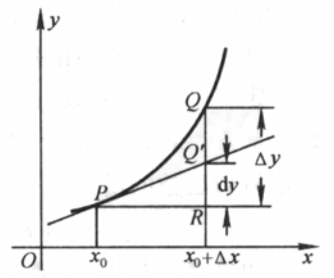


图 5-9

这表明当 $x \to x_0$ 时线段 $Q'Q$ 的长度比 RQ' 的长度要小得多.

若函数 $y = f(x)$ 在区间上每一点都可微，则称 f 为 I 上的**可微函数**．函数 $y = f(x)$ 在 I 上任一点历 x 处的**微分**记作

$$\mathrm{d}\, y = f'(x)\Delta x, x \in I, \tag{3}$$

它不仅依赖于 Δx，而且也依赖于 x.

特别当 $y = x$ 时，$dy = dx = \Delta x$，这表示自变量的微分 dx 就等于自变量的增量．于是可将(3)式改写为:

$$dy = f'(x)dx, \tag{4}$$

即函数的微分等于函数的导数与自变量微分的积．比如

$$d\left(x^{\alpha}\right)=\alpha x^{\alpha-1}dx\text{；}\ d(\sin x)=\cos x dx\text{；}\ d(\ln x)=\frac{dx}{x}.$$

如果把(4)式写成

$$f'(x)=\frac{dy}{dx},$$

那么函数的导数就等于函数微分与自变量微分的商．因此，导数也常称为**微商**．在这以前，我们总把$\frac{dy}{dx}$作为一个运算记号的整体来看待，有了微分概念之后，也不妨把它看作一个分式了．

二、微分的运算法则

由导数与微分的关系，我们能立刻推出如下微分运算法则：

1．$d[u(x)\pm v(x)]=du(x)\pm dv(x)$；

2．$d[u(x)v(x)]=v(x)du(x)+u(x)dv(x)$；

3. $d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\frac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{v^{2}(x)}$；

4．$d\left(f\circ g(x)\right)=f'(u)g'(x)dx,$ 其中 $u=g(x)$.

在上述复合函数的微分运算法则 4 中，由于 $du=g'(x)dx$，所以它也可写作

$$dy=f'(u)du.$$

这与(4)式在形式上完全相同，即(4)式不仅在 x 为自变量时成立，当它是另可微函数的因变量时也成立．这个性质通常称为**一阶微分形式的不变性**．

例 1　求 $y=\sin^{2}x$ 的微分.

解　$dy=d\left(\sin x^{2}\right)=\cos x^{2}d(x^{2})=2x\cos x^{2}dx$

例 2　求 $y=e^{\sin(ax+b)}$的微分.

解

$$\begin{aligned}dy&=e^{\sin(ax+b)}\,d(\sin(ax+b))\\&=e^{\sin(ax+b)}\cos(ax+b)d(ax+b)\\&=ae^{\sin(ax+b)}\cos(ax+b)dx.\end{aligned}$$

三、高阶微分

我们知道函数 $y=f(x)$ 的一阶微分是 $dy=f'(x)dx$，其中变量 x 和 dx 是相互独立的．现将一阶微分只作为 x 的函数，若 f 二阶可导，那么 dy 对自变量 x 的微分

$$d(dy)=d\left(f'(x)dx\right)=f''(x)dx\cdot dx=f''(x)(dx)^2,$$

或写作

$$d^2y=f''(x)dx^2, \tag{5}$$

称它为函数 f 的**二阶微分**.

【注】 这里 dx^2 是指 $(dx)^2$；d^2x 表示 x 的二阶微分 $\left(d^2x=0\right)$；而 $d\left(x^2\right)$ 则表示 x^2 的一阶微分 $\left(d\left(x^2\right)=2xdx\right)$. 三者不能混淆.

一般地，n **阶微分**是 $n-1$ 阶微分的微分，记作 d^ny，即

$$d^ny=d\left(d^{n-1}(y)\right)=d\left(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}\right)=f^{(n)}(x)dx^n.$$

若将它写成

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x)$$

时，就和 n 阶导数的记法一致了.

对 $n\ge 2$ 的 n 阶微分均称为**高阶微分**.

一阶微分具有形式不变性，而对于高阶微分来说已不具备这个性质了. 以二阶微分为例，当 x 为 $y=f(x)$ 的自变量时，

$$d^2y=f''(x)dx^2. \tag{6}$$

当 x 为复合函数 $y=f(x), x=\varphi(t)$ 的中间变量时，$y=f(\varphi(t))$ 作为 t 的函数，关于 t 的一阶微分可以写作

$$dy=f'(x)dx,$$

其中 $dx=\varphi'(t)dt$；而对 t 的二阶微分则为

$$d^2y=\left(f(\varphi(t))\right)''dt^2=\left(f'(\varphi(t))\varphi'(t)\right)'dt^2$$

$$=\left[f''(\varphi(t))(\varphi'(t))^2+f'(\varphi(t))\varphi''(t)\right]dt^2$$

$$=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x, \tag{7}$$

比(3)式多了一项，这说明二阶微分已不再具有形式不变性.

例 3　设 $y=f(x)=\sin x$， $x=\varphi(t)=t^2$．分别依公式(6)和公式(7)求 d^2y.

解　由 $y=\sin t^2$ 得 $y'=2t\cos t^2$， $y''=2\cos t^2-4t^2\sin t^2$，依式(6)得

$$d^2y=\left(2\cos t^2-4t^2\sin t^2\right)dt^2.$$

类似地，依公式(7)可得

$$d^2y=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x=-\sin xdx^2+\cos xd^2x$$

$$=-\sin t^2\cdot(2t)^2dt^2+\cos t^2 2dt^2=\left(2\cos t^2-4t^2\sin t^2\right)dt^2.$$

【注】　下面的解法是错误的:

$$d^2y=f''(x)dx^2=-\sin x(2tdt)^2=-4t^2\sin t^2dt^2.$$

四、微分在近似计算中的应用　【略】