第 36 卷第 3 期 大 学 数 学 Vol. 36, №. 3
2020 年 6 月 COLLEGE MATHEMATICS Jun. 2020

关于镜面反射矩阵的注记

吾勃日满达福， 李红裔， 赵 迪
（北京航空航天大学 数学科学学院，北京 100191）

［摘 要］涉及到矩阵分解时，镜面反射矩阵起着非常重要的作用. 讨论镜面反射矩阵的若干性质，给出了镜面反射矩阵一个重要性质的逆命题. 即当 n 阶 Hermite 矩阵的特征值与镜面反射矩阵的特征值相同时，该 Hermite 矩阵恰好是一个镜面反射矩阵.

［关键词］镜面反射矩阵；Hermite 矩阵；特征值与特征向量
［中图分类号］O151.21 ［文献标识码］C ［文章编号］1672-1454(2020)03-0114-04

1 引 言

线性代数是代数学的一个分支，主要处理线性关系问题，其最重要的核心内容为矩阵代数. 很多问题可归结为矩阵问题，而解决矩阵问题时常用的方法为矩阵变换及矩阵分解[1]. 当涉及到矩阵分解时，镜面反射矩阵有着很重要的作用. 例如，利用镜面反射阵和旋转阵可以对不可逆矩阵进行有效的 QR 分解.

在文[2]中，利用镜面反射阵证明了平面 $px+qy+rz=d$ 和椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 相交当且仅当 $\sqrt{(ap)^2+(bq)^2+(cr)^2}\geqslant|d|$. 此外，处理有关电磁干扰信号领域中的问题时镜面反射阵也起着很重要的作用. 例如，阵列信号处理. 阵列信号处理的研究内容主要包括波达方向估计和自适应波束形成，其中对于波达方向估计，可以利用镜面反射变换对阵列信号的协方差矩阵进行降阶等. 为了进一步研究镜面反射阵的其它性质及应用，本文在讨论镜面反射阵的基本性质的基础上，给出一个镜面反射阵性质的逆命题.

2 镜面反射阵及性质

定义 1[3] 设 $\boldsymbol{X}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\in\mathbb{C}^n$ 为一个非零列向量，形如

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\frac{2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^H}{|\boldsymbol{X}|^2}$$

的 n 阶方阵称为镜面反射阵（或 Householder 阵），其中 $\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{X}^H$ 表示 $\boldsymbol{X}$ 的共轭转置.

特别地，当 $\boldsymbol{X}$ 为单位向量时，有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^H$.

下面列出镜面反射阵的一些性质.

性质 1[3] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶镜面反射矩阵，则有

(i) $\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 矩阵，即 $\boldsymbol{A}^H=\boldsymbol{A}$；

［收稿日期］2019-10-31；［修改日期］2020-03-17
［基金项目］国家自然科学基金资助项目(61771001)
［作者简介］吾勃日满达福(1994－)，男，硕士在读，数学专业. Email:mandafu1101@163.com
［通讯作者］赵迪(1962－)，男，博士，教授，从事复分析与矩阵论研究. Email:zdzz@buaa.edu.cn

(ii) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$；

(iii) $\boldsymbol{A}$ 为酉矩阵；

(iv) $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^H=\boldsymbol{A}$.

性质 2[3]　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶镜面反射阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$.

由此可知，镜面反射阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式满足：$\det(\boldsymbol{A})=-1$.

在文[4]中，作者用不同的 3 种方法证明了性质 2. 其它关于特征值的性质可见参考文献[5].

3　引　　理

为了进一步讨论镜面反射矩阵的性质，下面给出两个引理：

引理 1　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶镜面反射矩阵，$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\mathbb{C}^n$ 为两个非零向量，则有

(i) $\boldsymbol{AX}=-\boldsymbol{X}$；

(ii) 若 $\boldsymbol{X}\perp\boldsymbol{Y}$(正交)，则 $\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{Y}$.

注　本文中采用列向量记号，例如 $\boldsymbol{X}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 是列向量.

证　(i) 利用镜面反射阵公式 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\dfrac{2\boldsymbol{XX}^H}{|\boldsymbol{X}|^2}$，及 $\boldsymbol{X}^H\boldsymbol{X}=|\boldsymbol{X}|^2$，直接计算可知

$$\boldsymbol{AX}=\left(\boldsymbol{I}-\frac{2\boldsymbol{XX}^H}{|\boldsymbol{X}|^2}\right)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}-\frac{2\boldsymbol{X}\,|\boldsymbol{X}|^2}{|\boldsymbol{X}|^2}=\boldsymbol{X}-2\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{X};$$

(ii) 由于 $\boldsymbol{X}\perp\boldsymbol{Y}$，故，内积 $\langle\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}\rangle=\boldsymbol{X}^H\boldsymbol{Y}=0$. 因此

$$\boldsymbol{AY}=\left(\boldsymbol{I}-\frac{2\boldsymbol{XX}^H}{|\boldsymbol{X}|^2}\right)\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}-\frac{2\boldsymbol{XX}^H\boldsymbol{Y}}{|\boldsymbol{X}|^2}=\boldsymbol{Y}-\frac{2\boldsymbol{X}\langle\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}\rangle}{|\boldsymbol{X}|^2}=\boldsymbol{Y}.$$

引理 2　(i) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^n$ 为实向量，且 $|\boldsymbol{\alpha}|=|\boldsymbol{\beta}|$，则 $(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\perp(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$；

(ii) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{C}^n$ 为复向量，若 $|\boldsymbol{\alpha}|=|\boldsymbol{\beta}|$ 且内积 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\boldsymbol{\beta}^H\boldsymbol{\alpha}$ 为实数，则 $(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\perp(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$.

证　要证 $(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\perp(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$，只需证明内积 $\langle\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\rangle=0$ 即可.

(i) 由于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^n$，故内积 $\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$，又根据内积的性质得到

$$\langle\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle+\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle-\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle-\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\rangle=|\boldsymbol{\alpha}|^2-|\boldsymbol{\beta}|^2=0;$$

(ii) 由于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{C}^n$ 且内积 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\boldsymbol{\beta}^H\boldsymbol{\alpha}$ 为实数，则有 $\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle=\overline{\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle}=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$，从而根据内积性质可知

$$\langle\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle+\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle-\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle-\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\rangle=|\boldsymbol{\alpha}|^2-|\boldsymbol{\beta}|^2=0.$$

值得注意的是引理 2 的几何意义是“欧氏空间中棱形的对角线必相互正交”.

4　主要结果

利用上面的引理，给出以下定理的简单证明.

定理 1　设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{C}^n$，$|\boldsymbol{\alpha}|=|\boldsymbol{\beta}|$ 且内积 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\boldsymbol{\beta}^H\boldsymbol{\alpha}$ 为实数，则存在镜面反射阵 $\boldsymbol{A}$ 使 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\beta}$ 且

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\frac{2(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^H}{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2}.$$

证　由镜面反射阵的公式 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\dfrac{2\boldsymbol{XX}^H}{|\boldsymbol{X}|^2}$ 及引理 1(i) 有 $\boldsymbol{AX}=-\boldsymbol{X}$. 令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$(或 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}$)，如下图 1 所示.

由于 $|\boldsymbol{\alpha}|=|\boldsymbol{\beta}|$ 且 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\boldsymbol{\beta}^H\boldsymbol{\alpha}$ 为实数，则由引理 2(ii) 得知 $(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\perp(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$，即 $\boldsymbol{X}\perp(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$.

根据性质 1(i)，(ii) 可得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=-(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}),\quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},$$

将上面两个等式相加，得到 $2\boldsymbol{A\alpha}=2\boldsymbol{\beta}$，即 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

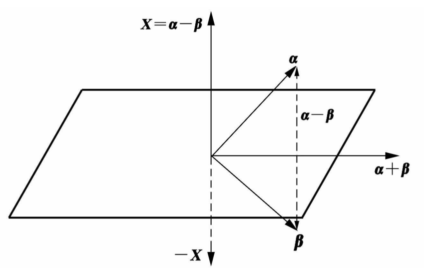

图 1

注意到定理 1 中的条件 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是复向量，对于实向量也有如下

类似的结论：

推论　设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^n$，若 $|\boldsymbol{\alpha}|=|\boldsymbol{\beta}|$，则存在镜面反射阵 A 使得 $A\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$ 成立.

为了更好地理解上面的定理1及推论，下面给出两个例子.

例1　设 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$，求镜面阵 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}-\dfrac{2(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^H}{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2}$，并且验证 $\boldsymbol{P\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

解　从条件得 $|\boldsymbol{\alpha}|=|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$. 通过计算得到

$$(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^H=\begin{pmatrix}3+2\sqrt{2} & 1+\sqrt{2}\\ 1+\sqrt{2} & 1\end{pmatrix},\quad |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2=4+2\sqrt{2},$$

则有

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}-\frac{2(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^H}{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

并且有

$$\boldsymbol{P\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}.$$

例2　设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2\,(\mathrm{i}^2=-1)$，求镜面阵 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}-\dfrac{2(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^H}{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2}$，验证 $\boldsymbol{P\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

解　条件可得 $|\boldsymbol{\alpha}|=|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{2}$，且 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\boldsymbol{\beta}^H\boldsymbol{\alpha}=0$ 为实数，$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$. 计算可得

$$(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^H=2\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2=4,$$

则有

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}-\frac{2(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^H}{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

并且有

$$\boldsymbol{P\alpha}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}.$$

最后给出一个关于镜面反射阵性质2的逆命题.

定理2　设 n 阶 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$，则 $\boldsymbol{A}$ 是一个镜面反射阵. 即，存在单位向量 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{C}^n(\boldsymbol{X}^H\boldsymbol{X}=|\boldsymbol{X}|^2=1)$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{XX}^H$.

证　由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda(\boldsymbol{A})=\{-1,1,\cdots,1\}$，从而 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\{2,0,\cdots,0\},$$

且矩阵 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 矩阵.

根据 Hermite 矩阵分解定理，存在酉矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)$ 使得

$$\boldsymbol{Q}^H(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{pmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}2 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^H=2\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}(1\quad 0\quad \cdots\quad 0)\boldsymbol{Q}^H=2(\boldsymbol{Qe}_1)(\boldsymbol{Qe}_1)^H.$$

其中

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_1=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{X},$$

上式中间利用了满秩分解.

从而有 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^H$,即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^H$ 为镜面反射阵.

5 结　　论

镜面反射阵在矩阵的应用计算中有着非常重要的作用.一方面它可以对一些不可逆矩阵进行 QR 分解,而施密特方法对不可逆矩阵失效.另一方面,可以利用镜面反射阵快速把一个非零向量扩充为 $\mathbb{C}^n$ 中的正交基等等.本文利用 Hermite 矩阵分解定理,在讨论镜面反射阵的基本性质的基础上,给出了镜面反射阵性质的一个逆命题及其证明.这有助于进一步了解镜面反射阵的结构与作用.

致谢　非常感谢相关文献对本文的启发以及审稿专家提出的宝贵意见.

[参　考　文　献]

[1] 靳全勤. 初等变换的一个应用:矩阵的满秩分解[J]. 大学数学, 2009, 25(5):195-197.

[2] 黄亦虹,许庆祥.平面和椭球面相截所得的椭圆的参数方程及其应用(英文)[J].上海师范大学学报(自然科学版), 2018, 47(1):24-30.

[3] Householder A S. The theory of Matrices in Numerical Analysis [M]. New York: Blaisdell Publishing Company, 1964.

[4] 吴华安. Householder 矩阵的性质及其等价表示[J]. 武汉理工大学学报(交通科学与工程版), 2006, 30(3):543-545.

[5] 施劲松, 刘剑平. 矩阵特征值、特征向量的确定[J]. 大学数学, 2003, 19(6):123-126.

Notes on the Householder Matrix

WU Borimandafu, *LI Hong-yi*, *ZHAO Di*

(School of Mathematical Sciences, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: The householder matrix plays a very important role in matrix decomposition. Based on the basic properties of the householder matrix, we present an inverse proposition of an important property of the householder matrix. When the eigenvalues of the Hermite matrix are the eigenvalues of the householder matrix, the Hermite matrix with order n is a householder matrix.

Key words: householder matrix; Hermite matrix; eigenvalue and eigenvector