第九章 常微分方程数值解法

§1 Euler方法
§2 Runge-Kutta法
§3 单步法的绝对稳定性
§4 线性多步法
§5 一阶方程组与高阶方程的初值问题

常微分方程数值解法

必要性

在工程和科学技术的实际问题中，常需要求解微分方程。只有简单的和典型的微分方程可以求出解析解，而在实际问题中的微分方程往往无法求出解析解。

如微分方程初值问题$\begin{cases} y' = 1 - 2xy \\ y(0) = 0 \end{cases}$，其解析解(精确解)为：

$$y(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$$

但$y(1)$、$y(1.5)$等值却无法直接计算。

❑ 什么叫微分方程数值解

就是求微分方程解函数$y(x)$在区间$[a,b]$上的一系列离散点x_k：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

上函数值$y(x_k)$的近似值$y_k\ (k = 1,\cdots,n)$，称y_k为问题的数值解。

❑ 哪些微分方程的数值解？

✓ $\begin{cases} y' = f(x,y) \quad a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ ——一阶方程初值问题

✓ $\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \quad a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \ ,\ y'(a) = y'_0 \end{cases}$ ——高阶方程初值问题

✓ $\begin{cases} y'_1 = f_1(x,y_1,y_2) \quad y_1(x_0) = y_1 \\ y'_2 = f_2(x,y_1,y_2) \quad y_2(x_0) = y_2 \end{cases}$ ——方程组初值问题

❑ 微分方程"解析解"存在的条件 P186－定理1

§1 欧拉方法

一 问题

已知初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}, \quad h = \frac{b-a}{N},$$

求其解函数$y = y(x)$在等距节点$x_n = a + nh(n = 0,\cdots,N)$上的近似值 y_k ?

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

二 方法

1. Euler方法 显式公式

将初值问题的解函数$y = y(x)$在x_n点Tarloy展开，有：

$$y(x) = y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n) + \frac{y''(\xi)}{2!}(x - x_n)^2$$

而$y' = f(x,y)$，所以 $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$，代入上式：

$$y(x) = y(x_n) + f(x_n, y(x_n))(x - x_n) + \frac{y''(\xi)}{2!}(x - x_n)^2$$

令$x = x_{n+1}$：

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + f(x_n, y(x_n))(x_{n+1} - x_n) + \frac{y''(\xi_n)}{2!}(x_{n+1} - x_n)^2$$

$$= y(x_n) + f(x_n, y(x_n))h + \frac{y''(\xi_n)}{2!}h^2, \quad \text{其中}\xi_n \in (x_n, x_{n+1})$$

截去$T_1 = \dfrac{y''(\xi_n)}{2!}h^2$，得$y(x_{n+1})$的近似值$y_{n+1}$满足：

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)}$$ ——Euler公式

例1 用Euler公式求解初值问题 $\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ （$h = 0.1$）

解 由题意知：

$$f(x,y) = y - \frac{2x}{y}, x_0 = a = 0, n = 10, b = 1, y_0 = 1$$

根据**Euler**公式：

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(y_n - \frac{2x_n}{y_n}) \quad (n = 0, 1, \cdots, 9)$$

代入数据：

$$y_1 = y_0 + h(y_0 - \frac{2x_0}{y_0}) = 1 + 0.1(1 - \frac{2 \times 0}{1}) = 1.1$$

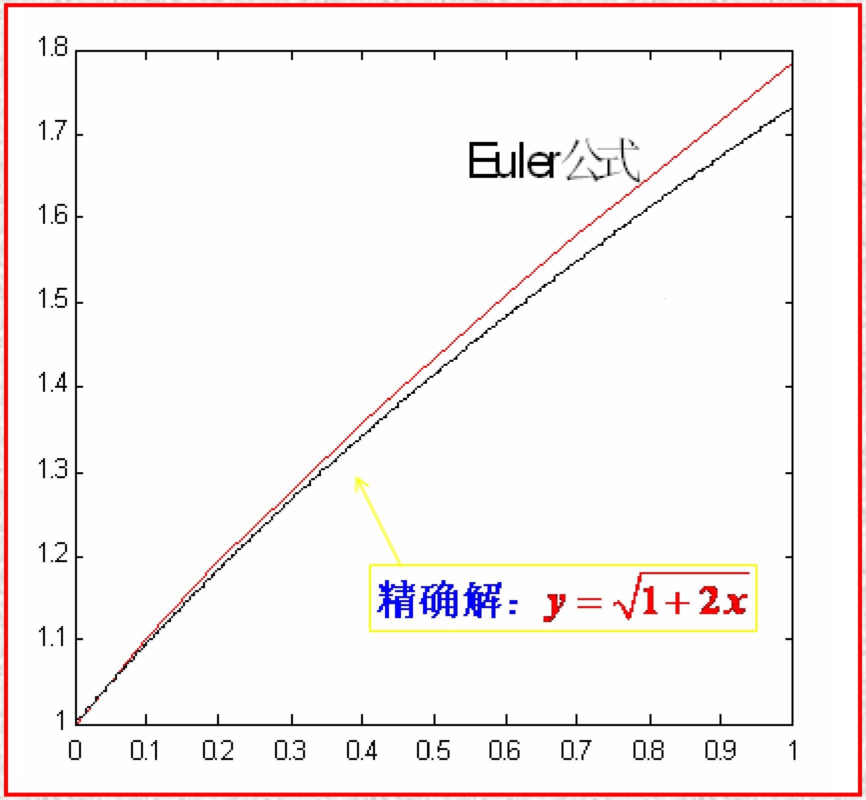
$$y_2 = y_1 + h(y_1 - \frac{2x_1}{y_1}) = 1.1 + 0.1(1.1 - \frac{2 \times 0.1}{1.1}) = 1.1918$$

依次类推 ...

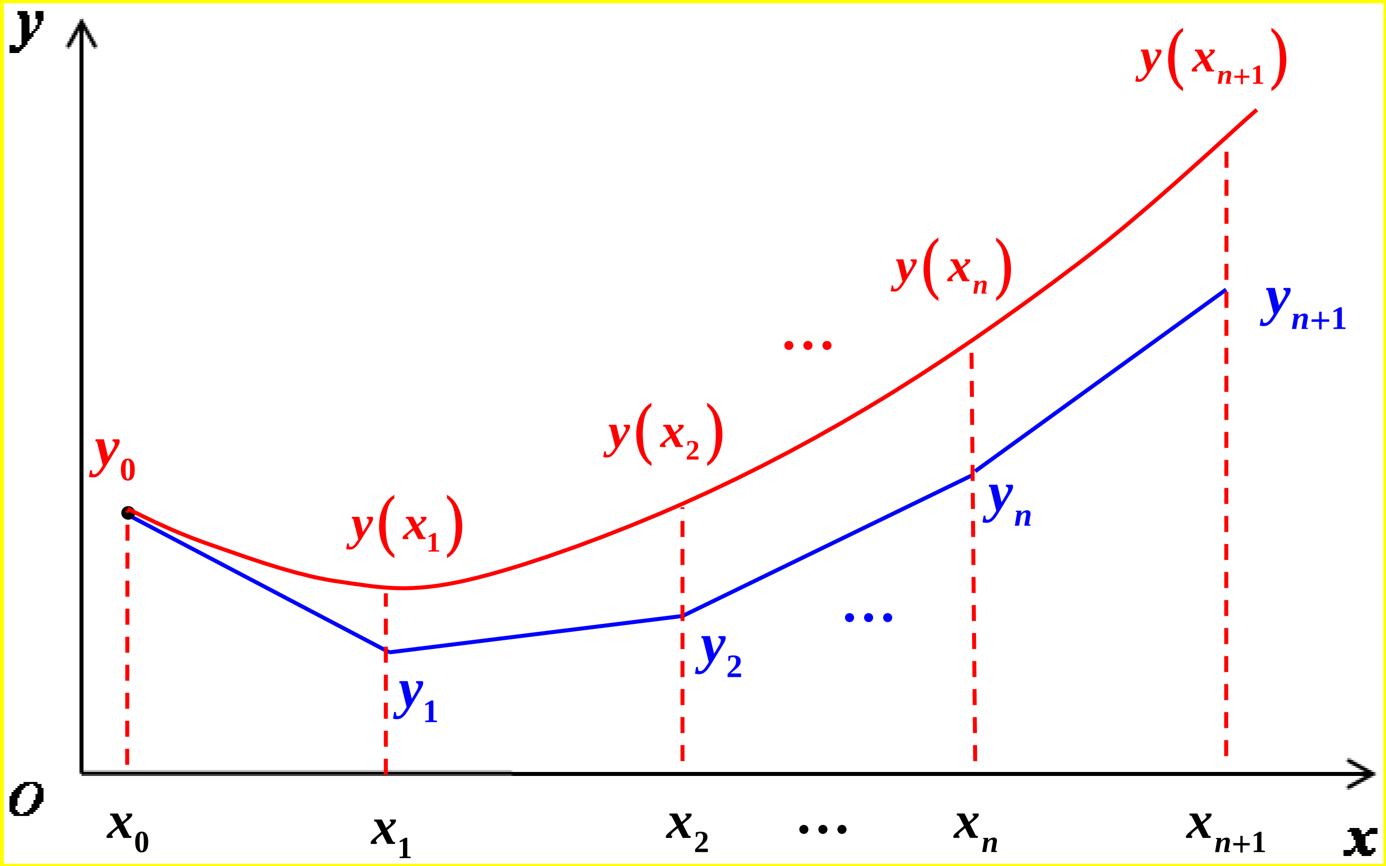
注 方程的精确解：$y = \sqrt{1 + 2x}$

例1(续) $\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ （$h = 0.1$）

n	x_n	数值解 y_n	精确解 $y(x_n)$
0	0.0	1.0000	1.0000
1	0.1	1.1000	1.0954
2	0.2	1.1918	1.1832
3	0.3	1.2774	1.2649
4	0.4	1.3582	1.3416
5	0.5	1.4351	1.4142
6	0.6	1.5090	1.4832
7	0.7	1.5803	1.5492
8	0.8	1.6498	1.6125
9	0.9	1.7178	1.6733
10	1.0	1.7848	1.7321



Euler方法的几何意义



2.后退的Euler方法 隐式公式

将$y=y(x)$在x_{n+1}点Tarloy展开：

$$y(x)=y(x_{n+1})+y'(x_{n+1})(x-x_{n+1})+\frac{y''(\xi)}{2!}(x-x_{n+1})^2$$

$$=y(x_{n+1})+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))(x-x_{n+1})+\frac{y''(\xi)}{2!}(x-x_{n+1})^2$$

令$x=x_n$：

$$y(x_n)=y(x_{n+1})+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))(x_n-x_{n+1})+\frac{y''(\xi_n')}{2!}(x_n-x_{n+1})^2$$

$$=y(x_{n+1})-hf(x_{n+1},y(x_{n+1}))+\frac{y''(\xi_n')}{2!}h^2,\quad \text{其中}\xi_n'\in(x_n,x_{n+1})$$

即：

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hf(x_{n+1},y(x_{n+1}))-\frac{y''(\xi_n')}{2!}h^2$$

截去$T_2=-\frac{y''(\xi_n')}{2!}h^2$，得$y(x_n)$的近似值$y_n$满足：

$$\boxed{y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})}\quad \text{——后退Euler公式}$$

3.梯形公式 隐式公式

$$\because\ y(x_{n+1})=y(x_n)+hf(x_n,y(x_n))+\frac{y''(\xi_n)}{2!}h^2$$

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hf(x_{n+1},y(x_{n+1}))-\frac{y''(\xi_n')}{2!}h^2$$

注意到：$T_1=\frac{y''(\xi_n)}{2!}h^2$和$T_2=-\frac{y''(\xi_n')}{2!}h^2$的″符号″相反

所以，两式相加并截去″T_1+T_2″得：

$$\boxed{y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})\right]}$$ ——梯形公式

4.改进的Euler公式

梯形公式为隐式公式，求解时往往需要求解非线性方程，实际计算中通常由Euler公式对y_{n+1}进行″预测″，利用梯形公式进行″校正″

$$\boxed{\begin{cases}\bar{y}_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)\\[2ex] y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},\bar{y}_{n+1})]\end{cases}}$$ ——改进的Euler公式

例2 求解初值问题 $\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ （$h = 0.1$）

解 $f(x, y) = y - \dfrac{2x}{y}$

Euler公式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(y_n - \frac{2x_n}{y_n})$$

改进Euler公式

$$f(x_n, y_n) = y_n - \frac{2x_n}{y_n} \triangleq K_1$$

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + hK_1$$

$$f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) = \bar{y}_{n+1} - \frac{2x_{n+1}}{\bar{y}_{n+1}} = (y_n + hK_1) - \frac{2x_{n+1}}{(y_n + hK_1)} \triangleq K_2$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$$

三 局部截断误差和方法的阶数

□ 局部截断误差

将方程精确解$y(x)$代入数值求解公式左右两端，左右两端之差$T = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$为方法的局部截断误差。

□ 方法的精度

若$T = O(h^{p+1})$，则称此方法具有p阶精度或称方法是p阶的。

□ Euler公式的局部截断误差与精度

1. Euler公式：

$y(x_{n+1})$：解函数$y(x)$在x_{n+1}点处的精确值；

y_{n+1}：假设第n步没有误差的条件下，代入数值公式后得到的$y(x_{n+1})$的近似值。

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$$

$$\because T_1=y(x_{n+1})-y_{n+1}$$

$$=y(x_{n+1})-\left[y(x_n)+hf(x_n,y(x_n))\right]$$

$$=y(x_n)+y'(x_n)(x_{n+1}-x_n)+\frac{y''(x_n)}{2!}(x_{n+1}-x_n)^2+\cdots-\left[y(x_n)+hy'(x_n)\right]$$

$$=y(x_n)+y'(x_n)h+\frac{y''(x_n)}{2!}h^2+\cdots-\left[y(x_n)+hy'(x_n)\right]$$

$$=\frac{y''(x_n)}{2!}h^2+\cdots$$

$$=O(h^2)$$

$\therefore$ 局部截断误差首项为：$\frac{y''(x_n)}{2!}h^2=O(h^2)$

方法具有"一阶"精度。

2. 后退的Euler公式: $y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$

$$\because T_2=y(x_{n+1})-y_{n+1}$$

$$=y(x_{n+1})-\left[y(x_n)+hf(x_{n+1},y(x_{n+1}))\right]$$

$$=y(x_n)+y'(x_n)(x_{n+1}-x_n)+\frac{y''(x_n)}{2!}(x_{n+1}-x_n)^2+\cdots-\left[y(x_n)+hy'(x_{n+1})\right]$$

$$=y(x_n)+y'(x_n)h+\frac{y''(x_n)}{2!}h^2+\cdots$$

$$-\left[y(x_n)+h\left(y'(x_n)+y''(x_n)h+\frac{y'''(x_n)}{2!}h^2+\cdots\right)\right]$$

$$=-\frac{y''(x_n)}{2!}h^2+\cdots$$

$$=O(h^2)$$

$\therefore$ 局部截断误差首项为: $-\dfrac{y''(x_n)}{2!}h^2=O(h^2)$

方法具有"一阶"精度。

3.梯形公式: $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})\right]$

$\because T=y(x_{n+1})-y_{n+1}$

$$=y(x_{n+1})-\left[y(x_n)+\frac{h}{2}\left(f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))\right)\right]$$

$$=y(x_{n+1})-\left[y(x_n)+\frac{h}{2}\left(y'(x_n)+y'(x_{n+1})\right)\right]$$

$$=y(x_n)+y'(x_n)h+\frac{y''(x_n)}{2!}h^2+\frac{y'''(x_n)}{3!}h^2+\cdots$$

$$-\left[y(x_n)+\frac{h}{2}\left(y'(x_n)+y'(x_n)+y''(x_n)h+\frac{y'''(x_n)}{2!}h^2+\cdots\right)\right]$$

$$=-\frac{y'''(x_n)}{12}h^3+\cdots=O(h^3)$$

$\therefore$ 局部截断误差首项为: $-\frac{y'''(x_n)}{12}h^3=O(h^3)$

方法具有"二阶"精度。

4. 改进的Euler公式: $\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] \end{cases}$

$$\because\ f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) = f(x_n + h, y(x_n) + hy'(x_n))$$

$$= y'(x_n) + hy''(x_n) + \frac{h^2}{2} y'''(x_n) + o(h^2)$$

其中$y' = f(x, y)$, $y'' = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} y'$

$$\therefore T = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$$

$$= y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2} h^2 + \frac{y'''(x_n)}{6} h^3 + \cdots$$

$$-y(x_n) - \frac{h}{2}[y'(x_n) + y'(x_n) + y''(x_n)h + \frac{y'''(x_n)}{2} h^2 + o(h^2)]$$

$$= -\frac{h^3}{12} y'''(x_n) + \cdots = O(h^3)$$

$\therefore$方法具有”二阶”精度。

练习

1 求差分格式 $y_{n+1}=\frac{1}{2}(y_n+y_{n-1})+\frac{h}{4}(4y'_{n+1}-y'_n+3y'_{n-1})$

的局部截断误差首项及方法的阶。

2 求"预测-校正"系统：

$$\begin{cases}\bar{y}_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)\\ y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},\bar{y}_{n+1})\end{cases}$$

的局部截断误差首项及方法的阶，并由此求解初值问题：

$$\begin{cases}y'=x+y,0\le x\le 0.3\\ y(0)=1\end{cases}(h=0.1)$$

答案： 1. $-\frac{5h^3}{8}y'''(x_n)=O(h^3)$， 2阶方法；

2. $-\frac{h^2}{2}y''(x_n)=O(h^2)$， 1阶方法

$y(0.1)\approx y_1=1.12$，$y(0.2)\approx y_2=1.2642$，$y(0.3)\approx y_3=1.435262$

§2 龙格-库塔公式

对于初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) & a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

对其精确解$y = y(x)$在$[x_n, x_{n+1}]$上利用微分中值定理，得

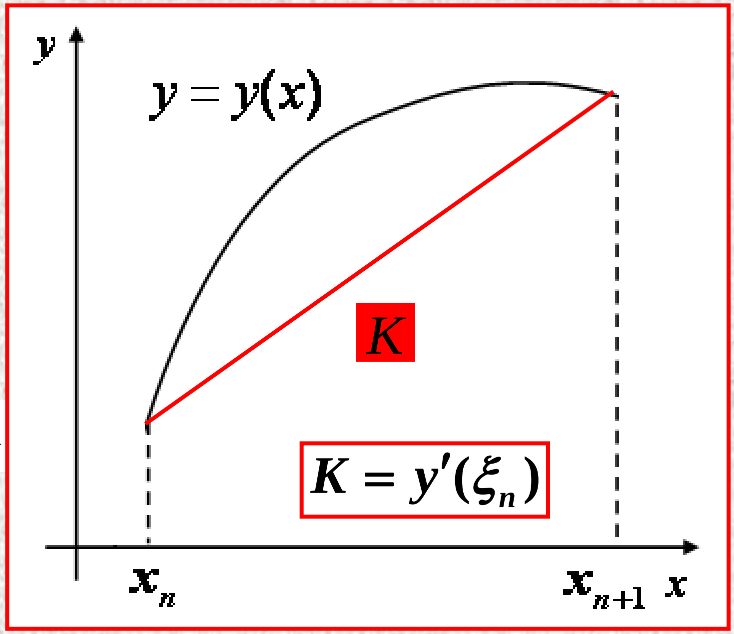
$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = y'(\xi_n)(x_{n+1} - x_n)$$

其中$\xi_n \in (x_n, x_{n+1})$

即： $y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(\xi_n)$

$\therefore y'(\xi_n)$可以看作$y(x)$在$[x_n, x_{n+1}]$上的平均斜率

下面给出平均斜率$y'(\xi_n)$的几种近似表达式。



1.以$y(x)$在x_n处的斜率作为平均斜率的近似:

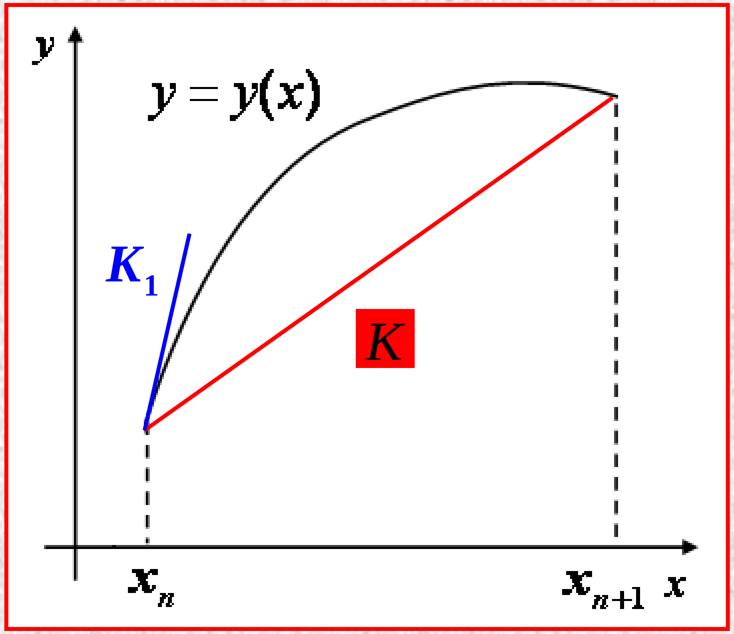
取$y'(\xi_n) \approx y'(x_n)$

$$= f(x_n, y(x_n))$$

$$\approx f(x_n, y_n)$$

得 $$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

--Euler方法



2.以$y(x)$在x_{n+1}处的斜率作为平均斜率的近似:

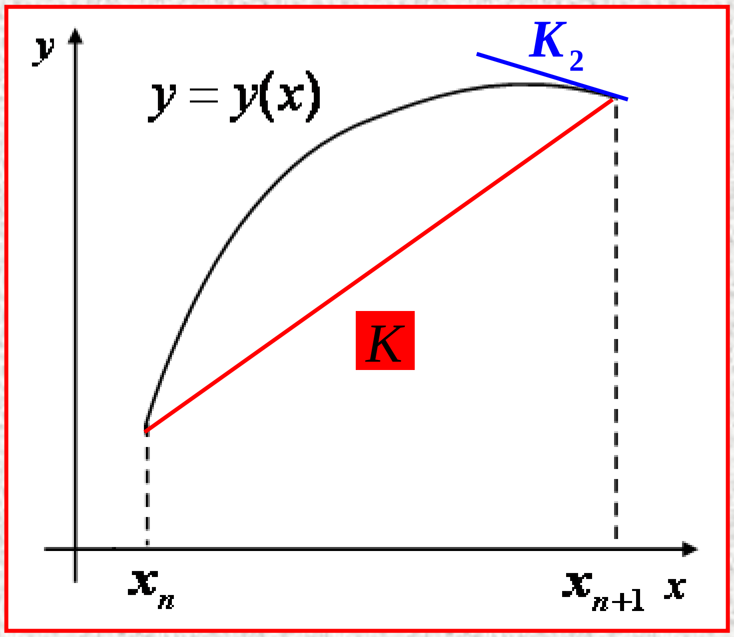
取$y'(\xi_n) \approx y'(x_{n+1})$

$$= f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$$

$$\approx f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

得 $$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

--后退的Euler方法



3.以$y(x)$在x_n和x_{n+1}处近似斜率的平均值作为平均斜率的近似

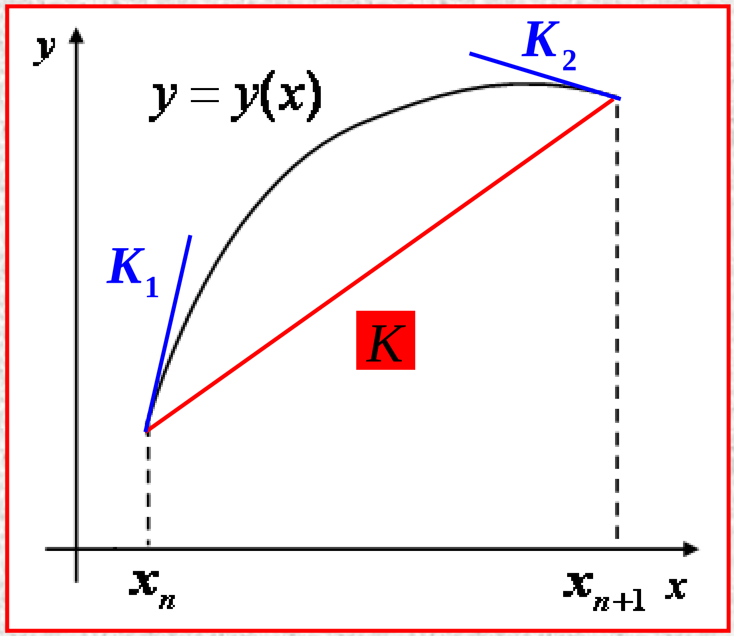
$$取y'(\xi_n)\approx\frac{1}{2}\left(y'(x_n)+y'(x_{n+1})\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))\right)$$

$$\approx\frac{1}{2}\left(f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})\right)$$

得 $$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left(f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})\right)$$

--梯形公式



4.改进的Euler公式

$$\begin{cases}\bar{y}_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)\\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left(f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},\bar{y}_{n+1})\right)\end{cases}$$

记$k_1=f(x_n,y_n),k_2=f(x_{n+1},y_n+hk_1)$

取$y'(\xi_n)\approx\frac{1}{2}(k_1+k_2)$, 得 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(k_1+k_2)$

5.推广　m级Runge- Kutta公式

在$[x_n, x_{n+1}]$内取m个点近似斜率的加权平均近似代替平均斜率$y'(\xi_n)$，即

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + a_2 h, y_n + h b_{21} k_1) \\ k_3 = f\left(x_n + a_3 h, y_n + h(b_{31} k_1 + b_{32} k_2)\right) \\ \quad\cdots\cdots \\ k_m = f\left(x_n + a_m h, y_n + h(b_{m1} k_1 + \cdots + b_{m,m-1} k_{m-1})\right) \end{cases}$$

令：$y_{n+1} = y_n + h(c_1 k_1 + c_2 k_2 + \cdots + c_m k_m)$

将其在x_n点Taylor展开，为使方法的阶数高，令展开式前面尽可能多的项的系数为零，从中解出a_i, b_{ij}, c_i。

二.　二阶R-K公式
$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} h k_1) \\ y_{n+1} = y_n + h(c_1 k_1 + c_2 k_2) \end{cases}$$

下面确定系数a_2, b_{21}, c_1, c_2，使其精度尽可能高。

考虑局部截断误差：$T = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$

设$y_n = y(x_n)$，将k_1，k_2在x_n点Taylor展开：

$$k_1 = f(x_n, y(x_n)) = y'(x_n)$$

$$k_2 = f(x_n + a_2 h, y(x_n) + b_{21} h y'(x_n))$$

$$= f(x_n, y(x_n)) + a_2 h f_x' + b_{21} h y'(x_n) f_y' + \cdots + o(h^3)$$

$$\therefore y_{n+1} = y(x_n) + h(c_1 k_1 + c_2 k_2)$$

$$= y(x_n) + (c_1 + c_2) h y'(x_n) + c_2 a_2 h^2 f_x' + c_2 b_{21} h y'(x_n) f_y' + o(h^3)$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3)$$

$$\therefore y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \big(1-(c_1+c_2)\big)hy'(x_n)$$
$$+h^2\left[\frac{1}{2}y''(x_n) - c_2 a_2\left(f_x' + \frac{b_{21}}{a_2}y'(x_n)f_y'\right)\right] + O(h^3)$$

令 $$\begin{cases} (1-(c_1+c_2))y'(x_n) \equiv 0 \\ \frac{1}{2}y''(x_n) - c_2 a_2\left(f_x' + \frac{b_{21}}{a_2}y'(x_n)f_y'\right) \equiv 0 \end{cases}$$

得 $$\begin{cases} 1-(c_1+c_2) = 0 \\ \frac{1}{2}y''(x_n) \equiv c_2 a_2\left(f_x' + \frac{b_{21}}{a_2}y'(x_n)f_y'\right) \end{cases}$$

故 $$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ f_x' + \frac{b_{21}}{a_2}y'(x_n)f_y' \equiv y''(x_n) \\ c_2 a_2 = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \frac{b_{21}}{a_2} = 1$$

综上可得: $$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_2 a_2 = \frac{1}{2} \\ b_{21}/a_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} h k_1) \\ y_{n+1} = y_n + h(c_1 k_1 + c_2 k_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_2 a_2 = \dfrac{1}{2} \\ b_{21} / a_2 = 1 \end{cases}$$

(1). $c_1 = c_2 = \dfrac{1}{2}, a_2 = b_{21} = 1$时

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + h, y_n + h k_1) \\ y_{n+1} = y_n + h\left(k_1 + k_2\right)/2 \end{cases}$$

——改进的Euler公式

(2). 取$c_1 = 0, c_2 = 1, a_2 = b_{21} = \dfrac{1}{2}$时，

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{1}{2} h k_1) \\ y_{n+1} = y_n + h k_2 \end{cases}$$

——变形的Euler公式

三. 三阶R-K公式

$$
\begin{cases}
K_1 = f(x_n, y_n) \\
K_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1) \\
K_3 = f(x_n + h, y_n + h(2K_2 - K_1)) \\
y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3)
\end{cases}
$$

四. 四阶R-K公式

$$\begin{cases} K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_1\right) \\ K_3 = f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_2\right) \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{cases}$$

注: 可以证明*m*级显式R-K公式的精度为:

$$P = \begin{cases} m, & m = 1,2,3,4 \\ m-1, & m = 5,6,7 \\ \le m-2, & m \ge 8 \end{cases}$$

大于4阶的公式较少使用.

§5 收敛性和稳定性

收敛性

设$x > x_0$是求解区间中任一点, y_n是用某种数值方法求得的在x处的近似解(步长$h = \dfrac{x - x_0}{n}$).如果$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y(x)$则称该数值方法是收敛的.

稳定性

若某种数值方法在y_n上有误差ε_n,由此引起以后各节点上近似解$y_m\ (m > n)$误差均不超过ε,则称该方法是数值稳定的.

1 绝对稳定性

若某种数值方法对$y' = \lambda y \quad (\lambda < 0)$是稳定的，则称该方法是绝对稳定的;

2 绝对稳定性区间

使数值方法绝对稳定的所有"$z \triangleq \lambda h$"的集合。

3 模型方程 $y' = \lambda y \quad (\lambda < 0)$

4 举例

📖 **Euler公式** $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

应用于模型方程 $y' = \lambda y (= f(x, y))$，可得：

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n = (1 + h\lambda) y_n$$

设y_n有误差ε_n，则由此引起的y_{n+1}有误差ε_{n+1}满足：

$$y_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = (1 + h\lambda)(y_n + \varepsilon_n)$$

$$\varepsilon_{n+1} = (1 + h\lambda)\varepsilon_n$$

为使Euler公式绝对稳定，则$|\varepsilon_{n+1}| < |\varepsilon_n|$

令$z = \lambda h$，则有 $|1 + z| < 1 \Rightarrow -2 < z < 0$

$\therefore$ Euler公式的绝对稳定区间为：$z \in (-2, 0)$ 步长h满足：$0 < h < \left|\frac{2}{\lambda}\right|$

📖 后退的Euler公式 $y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$

应用于模型方程 $y'=\lambda y(=f(x,y))$,可得:

$$y_{n+1}=y_n+h\lambda y_{n+1}$$

设y_n有误差ε_n,则由此引起的y_{n+1}有误差ε_{n+1}满足:

$$y_{n+1}+\varepsilon_{n+1}=y_n+\varepsilon_n+h\lambda(y_{n+1}+\varepsilon_{n+1})$$

即:

$$\varepsilon_{n+1}=\frac{1}{(1-h\lambda)}\varepsilon_n$$

为使Euler公式绝对稳定，则$|\varepsilon_{n+1}|<|\varepsilon_n|$

令$z=\lambda h$，则有 $\dfrac{1}{|1-z|}<1$ $\Rightarrow -\infty<z<0$

$\therefore$ 后退Euler公式的绝对稳定区间为：$z\in(-\infty,0)$

📖 对于一般方程:$y' = f(x,y)$ 以Euler公式为例

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

设y_n有误差ε_n,则由此引起的y_{n+1}有误差ε_{n+1}满足:

$$y_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = (y_n + \varepsilon_n) + hf(x_n, y_n + \varepsilon_n)$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + h[f(x_n, y_n + \varepsilon_n) - f(x_n, y_n)]$$

$$= \varepsilon_n + h\frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y}\varepsilon_n = (1 + h\frac{\partial f}{\partial y})\varepsilon_n$$

可见:$\dfrac{\partial f}{\partial y}$相当于模型方程中的$\lambda$。