第四章　函数的连续性

§1　连续性概念

连续函数是数学分析中着重讨论的一类函数.

从几何形象上粗略地说，连续函数在坐标平面上的图象是一条连绵不断的曲线. 当然我们不能满足于这种直观的认识，而应给出函数连续性的精确定义，并由此出发研究连续函数的性质. 本节中先定义函数在一点的连续性和在区间上的连续性.

一、函数在一点的连续性

定义 1　设函数 f 在某 $U\left(x_0\right)$ 内有定义. 若

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$$

则称 f **在点 x_0 连续.**

设函数 f 在某 $U^{\circ}\left(x_0\right)$ 内有定义. 若 f 在点 x_0 无定义，或 f 在点 x_0 有定义而不连续，则称点 x_0 为函数 f 的**间断点**或**不连续点**.

若 x_0 为函数 f 的间断点，则必出现下列情形之一：

（1） f 在点 x_0 无定义

（2）极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$ 不存在；

（3） f 在点 x_0 有定义且极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)\neq f\left(x_0\right)$

例如：函数 $f\left(x\right)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$,在点 $x=0$ 连续

函数 $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0 \\ 1, x=0 \end{cases}$,在点 $x=0$ 连续

增量形式的定义

记 $\Delta x = x - x_0$，称为**自变量** x (在点 x_0)的**增量**．设 $y_0 = f(x_0)$，相应的**函数** y (在点 x_0)的**增量**记为

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = y - y_0$$

则

$$y = f(x) \text{在点} x_0 \text{连续} \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

定义 2　设函数 f 在某 $U_+(x_0)\left(U_-(x_0)\right)$ 内有定义．若

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)\right),$$

则称 f 在点 x_0 **右(左)连续．**

显然

$$\text{函数} f \text{在点} x_0 \text{连续} \Leftrightarrow f \text{在点} x_0 \text{既是右连续又是左连续}$$

例如：$f(x) = \begin{cases} x+2, x \ge 2 \\ x-2, x < 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 右连续，但不左连续，从而它在 $x = 0$ 不连续。

例 1　狄利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, x \in Q \\ 0, x \notin Q \end{cases}$ 没有连续点。

因为 $\forall x_0 \in R$，$\lim\limits_{x \to x_0} D(x)$ 不存在（由归结原则）

例 2　函数 $f(x) = xD(x)$ 仅在点 $x = 0$ 连续．

显然 由 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$，$f$ 在点 $x = 0$ 连续．

另外，$\forall x_0 \ne 0$，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在。这是因为

取有理点列 $x_n \to x_0$，$f(x_n) = x_n D(x_n) = x_n \to x_0 \ne 0$

取无理点列 $\overline{x}_n \to x_0$，$f(\overline{x}_n) = \overline{x}_n D(\overline{x}_n) = 0 \to 0$

例 3　黎曼函数

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{当} x = \dfrac{p}{q}\left(p,\ q \text{为正整数}, p/q \text{为既约真分数}\right) \\ 0, & \text{当} x = 0, 1 \text{ 及（0,1）内无理数} \end{cases}$$

在 $(0,1)$ 内任何无理点处都连续，任何有理点处都不连续．

由上一章例题 $\forall x_0 \in [0,1],\quad \lim\limits_{x\to x_0} R(x)=0$ 便知。（间断点是可数无穷多）

二、间断点的分类

第一类间断点：左右极限都存在的间断点。

第二类间断点：非第一类的间断点。即左右极限至少有一个不存在。

第一类间断点又分为**可去间断点**与**跳跃间断点**

1．可去间断点　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，而 f 在点 x_0 无定义，或有定义但 $f(x_0)\neq A$，则称 x_0 为 f 的可去间断点.

例如，$f(x)=|\operatorname{sgn} x|$，$x=0$ 是 f 的可去间断点．又如 $g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，$x=0$ 是 g 的可去间断点.

设 x_0 为函数 f 的可去间断点，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，定义

$$\hat{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq x_0 \\ A, & x=x_0 \end{cases}$$

则对于函数 $\hat{f}$ 在点 x_0 连续.

2．跳跃间断点　若函数 f 在点 x_0 的左、右极限都存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，则称点 x_0 为函数 f 的**跳跃间断点**.

例如，$f(x)=[x]$，当 $x=n$ （n 为整数)时有

$$\lim_{x\to n^-}[x]=n-1，\quad \lim_{x\to n^+}[x]=n$$

整数点都是函数 $f(x)=[x]$ 的跳跃间断点.

第二类间断点的例子：

$f(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时，不存在有限的极限（无穷间断点）

$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处左、右极限都不存在（振荡间断点）

狄利克雷函数 $D(x)$，其定义域 R 上每一点 x 都是第二类间断点.

三、区间上的连续函数

若函数 f 在区间 I 上的每一点都连续，则称 f 为 I 上的**连续函数**，记为 $f\in C(I)$。对于闭区间或半开半闭区间的端点，函数在这些点上连续是指左连续或右连续.

如函数 $y=\sin x$ 是 R 上连续函数，又如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 在 $(-1,1)$ 每一点处都连续，在 $x=1$ 为左连续，在 $x=-1$ 为右连续，因而它在 $\left[-1,1\right]$ 上连续.

若函数 f 在区间 $\left[a,b\right]$ 上仅有有限个第一类间断点，则称 f 在 $\left[a,b\right]$ 上**分段连续.**

例如，函数 $y=\left[x\right]$ 和 $y=x-\left[x\right]$]在区间 $\left[-3,3\right]$ 上是分段连续的.

§2　连续函数的性质

一、连续函数的局部性质

定理 1(局部有界性)　若函数 f 在点 x_0 连续，则 f 在某 $U(x_0)$ 内有界.

定理 2(局部保号性)　若函数 f 在点 x_0 连续，且 $f(x_0)>0$ (或 <0)，则对任何正数 $r<f(x_0)$ (或 $r<-f(x_0)$)，存在某 $U(x_0)$，使得对一切 $x\in U(x_0)$ 有 $f(x)>r$ （或 $f(x)<-r$ ）。

【注】 在具体应用局部保号性时,常取 $r=\dfrac{1}{2}f(x_0)$,则当 $f(x_0)>0$ 时,存在某 $U(x_0)$ 使在其内有 $f(x)>\dfrac{1}{2}f(x_0)$.

定理 3(四则运算)　若函数 f 和 g 在点 x_0 连续，则 $f\pm g, f\cdot g, f/g$ (这里 $g(x_0)\neq 0$) 也都在点 x_0 连续.

定理 4（复合函数的连续）若函数 g 在点 x_0 连续，$u_0=g(x_0)$，f 在点 u_0 连续，则复合函数 $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$ 在点 x_0 连续.

【注】见上一章。

二、闭区间上连续函数的基本性质

定义 1　设 f 为定义在数集 D 上的函数．若存在 $x_0\in D$，使得对一切 $x\in D$ 有

$$f(x_0)\geq f(x)\quad \left(f(x_0)\leq f(x)\right),$$

则称 f 在 D 上有最大(最小)值，并称 $f(x_0)$ 为 f 在 D 上的**最大(最小)值**，称 x_0 为 f 在 D 上的**最大(最小)值点**。

定理 4 (最值性定理)　若 $f\in C[a,b]$，则 f 在 $[a,b]$ 上有最大值与最小值.

证　（用致密性定理证明）记

$$M=\sup_{x\in[a,b]} f(x)\ (-\infty<M\leq+\infty)$$

下面证明$\exists\{x_n\}\subset[a,b]$，使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=M$$

如果$-\infty<M<+\infty$，根据上确界的定义，取$n=1,2,\cdots$，则$\exists x_n\in[a,b]$，使得

$$M-\frac{1}{n}\le f(x_n)\le M$$

两边取极限，即得$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=M$。

如果$M=+\infty$，即$f(x)$无上界，取$n=1,2,\cdots$，则$\exists x_n\in[a,b]$，使得

$$f(x_n)>n$$

显然有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$

又$\{x_n\}\subset[a,b]$，$\{x_n\}$有界，由致密性定理，$\{x_n\}$有收敛子列，不妨假设就是它本身。于是设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，显然$x_0\in[a,b]$，再由$f$的连续性得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)=M$$

上式说明M必为有限数，就是$f(x)$在$[a,b]$上的最大值。

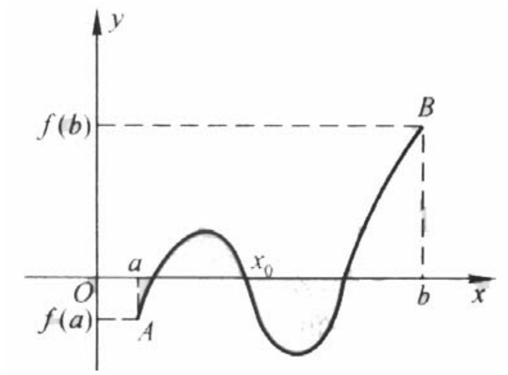
同理可证，$f(x)$在$[a,b]$上有最小值。

由最值定理立即得下面有界性定理。

定理 5 (有界性定理)　若$f\in C[a,b]$，则f在$[a,b]$上有界.

定理 6(根的存在定理)　若$f\in C[a,b]$，且$f(a)$与$f(b)$异号(即$f(a)f(b)<0$)，则至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)=0$，即方程$f(x)=0$在(a,b)上至少有一个根.

这个定理的几何解释如下图所示：若点$A(a,f(a))$与$B(b,f(b))$分别在x轴的两侧，则连接A、B的连续曲线$y=f(x)$与x轴至少有一个交点.



证 不妨设 $f(a)<0, f(b)>0$。记

$$E=\{x \mid f(x)<0, x\in[a,b]\}$$

显然 $E\neq\Phi$ 且 E 有界，记

$$x_0=\sup E\in[a,b]。$$

首先证明 $x_0\neq a,b$，即 $x_0\in(a,b)$。由 $f(a)<0, f(b)>0$ 以及连续函数的局部保号性知，$\exists\delta>0$，使得

$$f(x)<0, x\in[a,a+\delta) \text{ 和 } f(x)>0, x\in(b-\delta,b]$$

这说明 $x_0\neq a,b$，即 $x_0\in(a,b)$。.

其次再证明 $f(x_0)=0$。倘若 $f(x_0)\neq 0$，不妨设 $f(x_0)<0$。再由局部保号性，$\exists U(x_0,\eta)\subset(a,b)$，使得

$$f(x_0)<0，\quad x\in U(x_0,\eta)$$

特别地 $f\left(x_0+\dfrac{\eta}{2}\right)<0$，因此 $x_0+\dfrac{\eta}{2}\in E$，这与 $x_0=\sup E$ 相矛盾。

【注】如果 $f(x_0)=0$，也称 x_0 是函数 f 的一个零点。因此，根的存在定理也称零点存在定理。

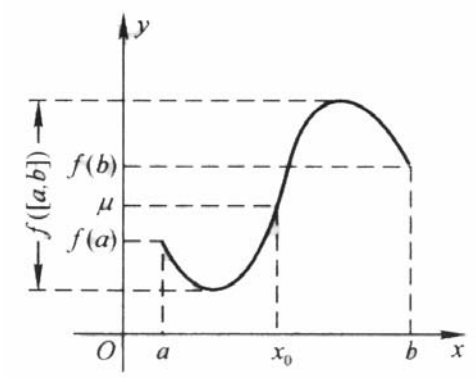
定理 7 (**介值性定理 1**)　设 $f\in C[a,b]$，且 $f(a)\neq f(b)$. 若 μ 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何实数 ($f(a)<\mu<f(b)$ 或 $f(a)>\mu>f(b)$)，则至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=\mu.$

证 令 $g(x)=f(x)-\mu$。由根的存在定理立即得证。

这个定理表明，若 f 在 $[a,b]$ 上连续，又不妨设 $f(a)<f(b)$，则 f 在 $[a,b]$ 上必能取得区间 $[f(a),f(b)]$ 中的一切值，即有

$$[f(a),f(b)]\subset f([a,b])$$

其几何意义如下图所示.



定理 8(介值性定理 2) 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，f 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M，最小值为 m，则 f 在 $[a,b]$ 上必能取得区间 $[m,M]$ 中的一切值，即 $f([a,b])=[m,M]$。

证 由最值性定理，记

$$a_1=\min_{x\in[a,b]}f(x),\quad b_1=\max_{x\in[a,b]}f(x)$$

不妨设 $a_1<b_1$，则对区间 $[a_1,b_1]$ 用介值性定理 1 即得证。

例 1（教材例 3） 证明：若 $r>0$，n 为正整数，则存在唯一正数 x_0，使得 $x_0^n=r$。

证 先证存在性．由于当 $x\to+\infty$ 时有 $x^n\to+\infty$，故必存在正数 a，使得 $a^n>r$．因 $f(x)=x^n$ 在 $[0,a]$ 上连续，并有 $f(0)<r<f(a)$，故由介值性定理 1，至少存在一点 $x_0\in(0,a)$，使得 $f(x_0)=x_0^n=r$．

再证唯一性．设正数 x_1 使得 $x_1^n=r$，则有

$$x_0^n-x_1^n=(x_0-x_1)(x_0^{n-1}+x_0^{n-2}x_1+\cdots+x_1^{n-1})=0,$$

由于第二个括号内的数为正，所以只能 $x_0-x_1=0$，即 $x_1=x_0$．

【注】上面 x_0 称为 r 的 n 次正根（即算术根），记作 $x_0=\sqrt[n]{r}$).

例 2（教材例 4） 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，满足

$$f([a,b])\subset[a,b]$$

证明：存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)=x_0$.

证　条件意味着：对任何 $x\in[a,b]$ 有 $a\le f(x)\le b$，特别有

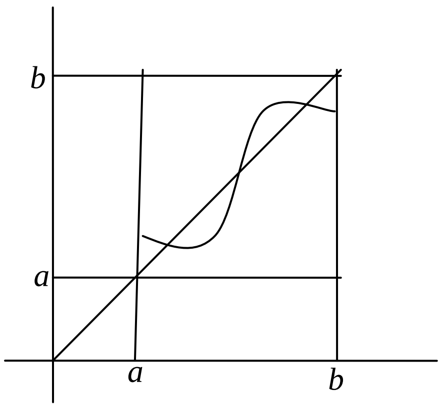
$$a\le f(a)\quad 以及\quad f(b)\ge b.$$

若 $a=f(a)$ 或 $f(b)=b$，则取 $x_0=a$ 或 b 即可.

现设 $a<f(a)$ 与 $f(b)<b$. 令

$$F(x)=f(x)-x$$

则 $F(a)=f(a)-a>0$,，$F(b)=f(b)-b<0$. 故由根的存在性定理，存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $F(x_0)=0$，即 $f(x_0)=x_0$.（参见下图）



例 3（习题 4.2：10）证明：任一实系数奇次方程至少有一个实根。

证　设实系数奇次方程为

$$f(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+\cdots+a_1x+a_0=0\text{，}\quad a_{2n+1}\ne 0$$

不妨 $a_{2n+1}>0$。由

$$f(x)=x^{2n+1}(a_{2n+1}+\frac{a_{2n}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{2n}}+\frac{a_0}{x^{2n+1}})$$

知 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，故存在 $a<b$， $f(a)<0,f(b)>0$

因 f 在 $[a,b]$ 上连续，于是由根的存在定理，存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=0$。

例 4（习题 4.2：19）设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续， $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$。证明：存在

$\xi \in [a,b]$，使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \right]。$$

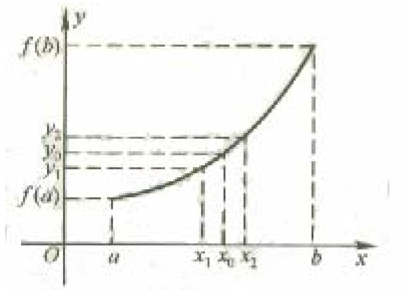
证　记 $M = \max\limits_{a \le x \le b} f(x), m = \min\limits_{a \le x \le b} f(x)$，则

$$m \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le M$$

由介值性定理 2，存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)$。

三、反函数的连续性

定理 9 若函数 f 在 $[a,b]$ 上严格单调并连续，则反函数 f^{-1} 在其定义域 $[f(a), f(b)]$ 或 $[f(b), f(a)]$ 上连续.



证　不妨设 f 在 $[a,b]$ 上严格增.

此时 f 的值域即反函数 f^{-1} 的定义域为 $[f(a), f(b)]$. 任取 $y_0 \in (f(a), f(b))$，设 $x_0 = f^{-1}(y_0)$，则 $x_0 \in (a,b)$. 于是对任给的 $\varepsilon > 0$，可在 (a,b) 内 x_0 的两侧各取异于 x_0 的点 $x_1, x_2 (x_1 < x_0 < x_2)$，使它们与 x_0 的距离小于 ε (见图).

设与 x_1, x_2 对应的函数值分别为 y_1， y_2，由 f 的严格增性知 $y_1 < y_0 < y_2$，令

$$\delta = \min(y_2 - y_0, y_0 - y_1),$$

则当 $y \in U(y_0;\delta)$ 时，对应的 $x = f^{-1}(y)$ 的值都落在 x_1 与 x_2 之间，故有 $\left| f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) \right| = |x - x_0| < \varepsilon$，所以 f^{-1} 在点 y_0 连续，从而 f^{-1} 在 $(f(a), f(b))$ 内连续.

类似地可证 f^{-1} 在其定义区间的端点 $f(a)$ 与 $f(b)$ 分别为右连续与左连续. 所以 f^{-1} 在 $[f(a), f(b)]$ 上连续.

【注】上面定理是按闭区间来叙述，由于连续是对点来定义的，显然可改为开区间或无穷区间等。

例如　由于 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上严格单调且连续，故其反函数 $y=\arcsin x$ 在区间 $[1,1]$ 上连续.

同理可得其它反三角函数也在相应的定义区间上连续．如 $y=\arccos x$ 在 $[-1,1]$ 上连续， $y=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续等.

四、一致连续性

函数 f 在区间上连续，是指 f 在该区间上每一点都连续．本段中讨论的一致连续性概念反映了函数在区间上更强的连续性.

引例 考察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$。它在 $(0,1)$ 上每一点 x_0 都连续，用定义写出为

$$\forall x_0\in(0,1),\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}\left|x-x_0\right|<\delta\text{时，有}\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$$

注意这里 δ 不仅与 ε 有关，而且与 x_0 有关。对同一个 ε， x_0 越靠近 0， δ 就越小。

作图说明（待补）。

问题： f 为定义在区间 I 上的函数，对 $\forall\varepsilon>0$，能否找到公共的 $\delta>0$，对 $\forall x_0\in I$，当 $\left|x-x_0\right|<\delta$ 时，有 $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$。

定义 2　设 f 为定义在区间 I 上的函数．若对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对任何 $x',x''\in I$，只要 $\left|x'-x''\right|<\delta$，就有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon,$$

则称函数 f 在区间 I 上**一致连续**.

直观地说， f 在 I 上一致连续意味着：不论两点 x' 与 x'' 在 I 中处于什么位置，只要它们的距离小于 δ，就可使 $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$.

思考 如果叙述 f 在区间 I 上不一致连续.

存在常数 $\varepsilon_0>0$，对任何正数 δ (不论 δ 多么小)，总存在两点 $x',x''\in I$，尽管

$|x'-x''|<\delta$，但$|f(x')-f(x'')|\ge\varepsilon_0$.

例 5　证明 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

证　$|\sin x'-\sin x''|=\left|2\cos\frac{x'-x''}{2}\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\le|x'-x''|$

例 6（教材例 9）证明函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$内不一致连续.

证　取 $\varepsilon_0=1$，对无论多么小的正数$\delta\left(<\dfrac{1}{2}\right)$，只要取 $x'=\delta$ 与 $x''=\dfrac{\delta}{2}$，则虽有 $|x'-x''|=\dfrac{\delta}{2}<\delta$，但

$$\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\frac{1}{\delta}>\varepsilon_0=1$$

所以 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$内不一致连续.

定理 10（教材例 10）$f(x)$ 在 I 上一致连续的充要条件为：对$\forall\{x_n'\},\{x_n''\}\subset I$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)=0$

证（必要性）若 $f(x)$ 在 I 上一致连续，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x',x''\in I$，$|x'-x''|<\delta$，有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

设$\{x_n'\},\{x_n''\}\subset I$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，于是对上述$\delta>0$，$\exists N>0$，$\forall n>N$，$|x_n'-x_n''|<\delta$，由一致连续性，有$|f(x_n')-f(x_n'')|<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)=0$$

（充分性）设$\forall\{x_n'\},\{x_n''\}\subset I$，若$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)=0$。现证 $f(x)$ 在 I 上一致连续。

用反证法证明。若 $f(x)$ 在 I 上不一致连续，则$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x',x''\in I,$ 满足 $|x'-x''|<\delta$，但有$|f(x')-f(x'')|\ge\varepsilon_0$。

取$\delta_n=\dfrac{1}{n},\exists x_n',x_n''\in I,|x_n'-x_n''|<\dfrac{1}{n}$，使得

$$|f(x_n')-f(x_n'')|\ge\varepsilon_0,n=1,2,\cdots$$

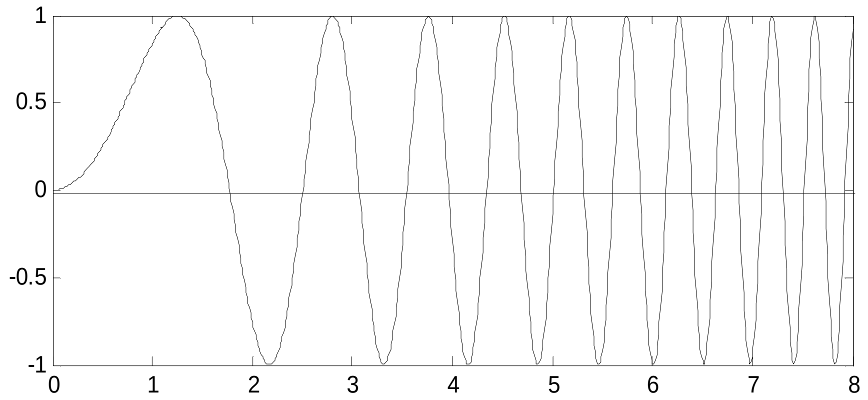
于是 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)\neq 0$。矛盾。

例 7 证明 $f(x)=\sin x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续。

证 取 $x_n'=\sqrt{n\pi+\dfrac{\pi}{2}},x_n''=\sqrt{n\pi}$，则

$$x_n'-x_n''=\frac{\pi/2}{\sqrt{n\pi+\pi/2}+\sqrt{n\pi}}\to 0$$

但 $|\sin x_n'-\sin x_n''|=1\not\to 0$，由定理 10 得证。



例 8 证明 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续。

证 取 $x_n'=n+\dfrac{1}{n},x_n''=n$，由定理 10 易证。

f 在区间 I 上每一点都连续，并不能推出 f 在 I 上一致连续．然而，对于定义在闭区间上的函数来说，由它在每一点都连续却可推出在区间上的一致连续性，即有如下重要定理：

定理 11 (**一致连续性定理，Cantor 定理**)　若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续．

证　反证。假设则 f 在 $[a,b]$ 上不一致连续，则 $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall\delta>0$，$\exists x_1,x_2\in[a,b]$，满足 $|x_1-x_2|<\delta$，但 $|f(x_1)-f(x_2)|\geq\varepsilon_0$．

取 $\delta=\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，相应地满足上述条件的两点记为 $x_n',x_n''\in[a,b]$，由致密性定理，$\{x_n'\}$ 有子列 $\{x_{n_k}'\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}'=x_0\in[a,b]$。

由

$$\left|x'_{n_k}-x''_{n_k}\right|\le\frac{1}{n_k}\Rightarrow\left|x''_{n_k}-x_0\right|\le\left|x''_{n_k}-x'_{n_k}\right|+\left|x'_{n_k}-x_0\right|$$

得 $\lim\limits_{k\to\infty}x''_{n_k}=x_0$

但是由我们的做法

$$\left|f(x'_{n_k})-f(x''_{n_k})\right|\ge\varepsilon_0$$

再由 f 的连续，上式两边取极限，得 $0=\left|f(x_0)-f(x_0)\right|\ge\varepsilon_0$，矛盾。

例 9　若 f 分别在 $<a,c]$ 和 $[c,b>$ 上一致连续，则 f 在 $<a,b>$ 上也一致连续.

证　任给 $\varepsilon>0$，

$\exists\delta_1>0$，$\forall\ x',x''\in<a,c]$，只要 $|x'-x''|<\delta_1$，就有 $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$

$\exists\delta_2>0$，$\forall x',x''\in[c,b>$，只要 $|x'-x''|<\delta_2$，就有 $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$

f 在点 c 为既左连续又右连续，所以 f 在点 c 连续．故对上述 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_3>0$，当 $|x-c|<\delta_3$ 时，有 $\left|f(x)-f(c)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

令 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$，对任何 $x',x''\in I$，$|x'-x''|<\delta$，分别讨论以下两种情形：

(i)　x',x'' 同时属于 $<a,c]$ 或 $[c,b>$，则 $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$ 成立；

（ii）x',x'' 分属 $<a,c]$ 与 $[c,b>$，设 $x'\in<a,c],,x''\in[c,b>$，则

$$|x'-c|=c-x'<x''-x'<\delta\le\delta_3,$$

故 $\left|f(x')-f(c)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.同理 $\left|f(x'')-f(c)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，从而 $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$。

例 10（第四章总练习习题：1）设函数 f 在 (a,b) 上连续，且 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 为有限值。证明：

（1）f 在 (a,b) 上有界；

（2）若存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)\ge\max\left\{f(a+0),f(b-0)\right\}$，则 f 在 (a,b) 内能取到最大值。

（3）f 在 (a,b) 上一致连续。

证（1）定义

$$F(x)=\begin{cases} f(a+0), x=a \\ f(x), a<x<b \\ f(b-0), x=b \end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，当然也在 (a,b) 内有界，即 f 在 (a,b) 内有界。

（2）因为 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 内取得最大值 $M=F(x_0)$。

如 $F(x_0)=f(\xi)$，ξ 即为 f 的最大值点。则得证。

如 $F(x_0)\neq f(\xi)$，则 $F(x_0)>F(\xi)=f(\xi)\geq \max\{F(a),F(b)\}$，

说明 $x_0\neq a,b$，$F(x)$ 的最大值在 (a,b) 上达到，即 f 的最大值在 (a,b) 上达到。

（3）$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，从而 f 在 (a,b) 上一致连续。

§3　初等函数的连续性

我们已经证得下面函数在其定义域上都是连续的：

$y=c$

$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$

$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$

定理 1　指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是连续的.

证　先设 $a>1$. 由第三章知

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1 = a^0,$$

这表明 a^x 在 $x=0$ 连续. 现任取 $x_0\in\mathbf{R}$.

$$a^x = a^{x_0+(x-x_0)} = a^{x_0}\cdot a^{x-x_0}$$

令 $t=x-x_0$，则当 $x\to x_0$ 时有 $t\to 0$，从而有

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} a^{x_0}a^{x-x_0} = a^{x_0}\lim_{t\to 0} a^t = a^{x_0}.$$

这就证明了 a^x 在任一点 x_0 连续.

当 $0<a<1$ 时，令 $b=\dfrac{1}{a}$，则有 $b>1$，而

$$a^x = (\frac{1}{b})^x = b^{-x}$$

可看作函数 b^u 与 $u=-x$ 的复合，所以此时 a^x 亦在 $\mathbf{R}$ 上连续.

推论 1 对数函数 $y=\log_a x$ 在其定义域 $(0,+\infty)$ 上连续.

推论 2 幂函数 $y=x^\alpha$ 在其定义域 $(0,+\infty)$ 上连续.

由 $y=x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$ 便知。

例 1　设 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=a>0$， $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=b$. 证明

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = a^b.$$

证　补充定义 $u(x_0)=a, v(x)=b$，则 $u(x), v(x)$ 在点 x_0 连续，从而 $v(x)\ln u(x)$ 在 x_0 连

续，所以 $u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}=e^{b\ln a}=a^b$ 在 x_0 连续．由此得

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{v(x)\ln u(x)}=e^{b\ln a}=a^b.$$

定理 2 一切基本初等函数都是其定义域上的连续函数．

定理 3 任何初等函数都是在其定义区间上的连续函数．

例 2　证明 $\ln(1+x)\sim x(x\to 0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1$$

例 3　证明 $e^x-1\sim x(x\to 0)$

令 $y=e^x-1, x\to 0\Leftrightarrow y\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1$$

例 4　证明 $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x(x\to 0,\alpha\neq 0)$

令 $y=(1+x)^\alpha-1$，$\alpha\ln(1+x)=\ln(1+y)$，$x\to 0\Leftrightarrow y\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{y}{\ln(1+y)}=1$$