第十七讲

函数极值的例，
第三充分条件

例2 求函数 $f(x)=(x-a)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值点与极值．

解 $f(x)=x^{\frac{5}{3}}-ax^{\frac{2}{3}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续．

当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2a}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}(5x-2a).$$

当 $a\neq 0$ 时, 稳定点为 $x=\frac{2a}{5}$, 不可导点为 $x=0$;

当 $a=0$ 时， 稳定点为 $x=0$ ， 没有不可导点.

为了更好地加以判别，我们列表如下：

(1) $a>0$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2a}{5})$	$\frac{2a}{5}$	$(\frac{2a}{5},+\infty)$
y'	$+$	不存在	$-$	0	$+$
y	增	0	减	$-\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}a^{\frac{5}{3}}$	增

即 $x=0$是极大值点，$f(0)=0$ 是极大值；

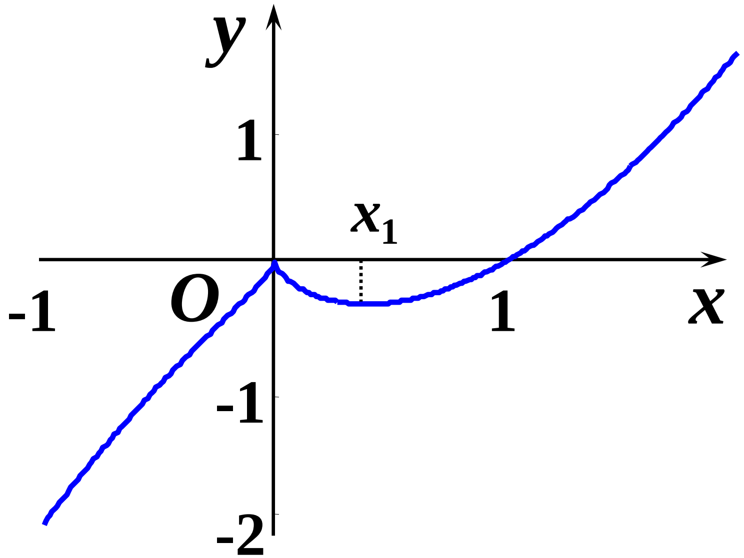
$x=\dfrac{2a}{5}$是极小值点，$f\left(\dfrac{2a}{5}\right)=-\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}a^{\frac{5}{3}}$ 是极小值.

(2) $a<0$

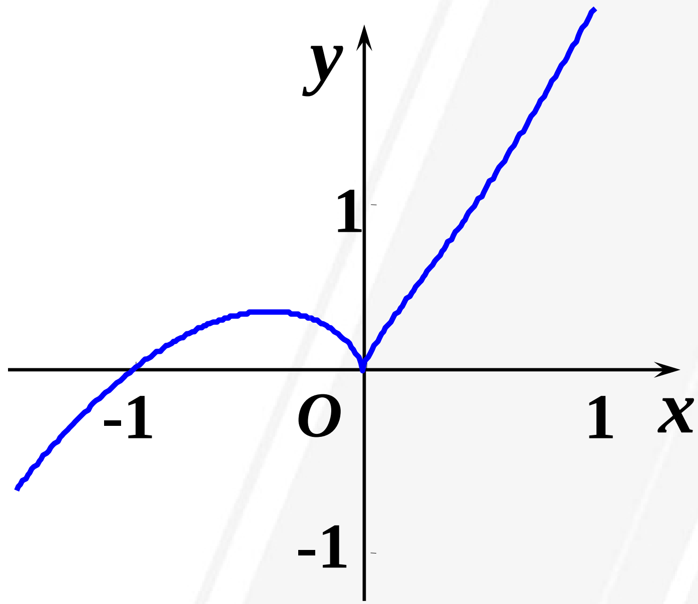
x	$(-\infty,\frac{2a}{5})$	$\frac{2a}{5}$	$(\frac{2a}{5},0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	不存在	$+$
y	增	$-\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}a^{\frac{5}{3}}$	减	0	增

即 $x=\frac{2a}{5}$是极大值点，$f\left(\frac{2a}{5}\right)=-\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}a^{\frac{5}{3}}$

是极大值；$x=0$是极小值点，$f(0)=0$ 是极小值 .



(1) $a > 0$



(2) $a < 0$

$$f(x) = (x - a)x^{\frac{2}{3}}$$

(3) $a = 0,\ f(x) = x^{\frac{5}{3}}$. 请读者自行讨论.

例 3 求 $f(x)=x^2+\dfrac{432}{x}$ 的极值点与极值.

解 $f(x)$ 的定义域为 $x\neq 0$,

$$f'(x)=2x-\frac{432}{x^2}.$$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=6$. 又因为

$$f''(6)=\left.\left(2+\frac{864}{x^3}\right)\right|_{x=6}=6>0,$$

由定理6.12, $x=6$是极小值点, $f(6)=108$是极小值.

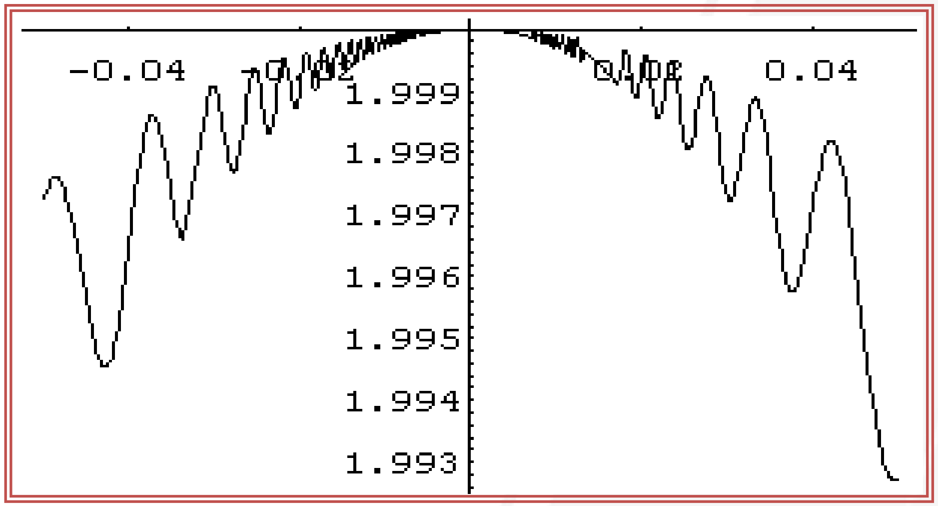
试问这里为什么不考虑不可导点 $x=0$?

注 极值的判别法(定理6.11和6.12) 都是充分条件. 当这些充分条件不满足时, 不等于极值不存在 .

例如

$$f(x)=\begin{cases} 2-x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 2, & x=0, \end{cases}$$

$f(0)=2$ 为极大值 , 但不满足定理定理6.11和6.12的条件.



对于 $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)=0$ 的情形，可借助于更高阶的导数来判别.

定理6.13（极值的第三充分条件）

设 f 在点 x_0 的某邻域内存在直到 $(n-1)$ 阶的导数，且 $f^{(n)}(x_0)$存在.

若$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$,

$f^{(n)}(x_0)\neq 0$，则

(i) n 为偶数时，x_0 是$\begin{cases}\text{极小值点，当 } f^{(n)}(x_0)>0,\\ \text{极大值点，当 } f^{(n)}(x_0)<0;\end{cases}$

(ii) n 为奇数时， x_0不是极值点 .

证 由泰勒公式, 有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{(n)} + o((x - x_0)^n)$$

$$= f(x_0) + \mu_n(x)(x - x_0)^n .$$

其中 $\mu_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1)$, 它在某邻域 $U(x_0;\delta)$ 内恒与 $f^{(n)}(x_0)$ 同号.

(i) 当 n 为偶数, 而 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时, 有

$$\mu_n(x)(x - x_0)^n > 0 , \ x \in U(x_0;\delta),$$

故 $f(x) \geq f(x_0)$, $x \in U(x_0;\delta)$, 即 x_0 是极小值点 ;

又当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时, 有

$$\mu_n(x)(x-x_0)^n<0,\ x\in U(x_0;\delta),$$

故 $f(x)\le f(x_0)$, $x\in U(x_0;\delta)$, 即 x_0 是极大值点.

(ii) 当 n 为奇数时, 有

$$(x-x_0)^n\begin{cases}<0,\ x\in(x_0-\delta,x_0),\\>0,\ x\in(x_0,x_0+\delta).\end{cases}$$

从而 $\mu_n(x)(x-x_0)^n$ 在 x_0 左右两侧异号, 这就说明了 x_0 不是极值点.

例 4 求函数 $f(x)=x^4(x-1)^3$ 的极值.

解 由 $f'(x)=x^3(x-1)^2(7x-4)=0$，求得 $x_1=0$，$x_2=1$，$x_3=\dfrac{4}{7}$ 是稳定点. 又因

$$f''(x)=6x^2(x-1)(7x^2-8x+2),$$

$f''(0)=f''(1)=0$，$f''\left(\dfrac{4}{7}\right)>0$，所以由第二充分条件，求得极小值为 $f\left(\dfrac{4}{7}\right)=-\dfrac{6912}{823543}$.

而对于稳定点 x_1 与 x_2 却无法知道结果，我们尝试用第三充分条件来进行判别.

由于

$$f'''(x) = 6x(35x^3 - 60x^2 + 30x - 4),$$

$$f'''(0) = 0\,,\ \ f'''(1) > 1\,,$$

因此 $x = 1$ 不是极值点($n = 3$ 是奇数). 又因

$$f^{(4)}(x) = 24(35x^3 - 45x^2 + 15x - 1)\,,$$

$$f^{(4)}(0) < 0\,,$$

$n = 4$是偶数，所以 $f(0) = 0$ 是极大值.

注 定理6.13也是判定极值的充分条件. 例如 $x = 0$ 是

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

的极小值点, 但是因为 $f^{(k)}(0) = 0,\quad k = 1, 2, \cdots,$

所以无法用定理 6.13 来判别.