第二讲

有限增量公式
左右导数，导函数

有限增量公式

设 $f(x)$ 在点 x_0 可导，$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. 则

$$\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)$$

是当$\Delta x\to 0$ 时的无穷小量，于是 $\alpha\Delta x=o(\Delta x)$.

这样，函数 $f(x)$ 的增量可以写成

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x). \qquad (5)$$

(5) 式称为 $f(x)$ 在点 x_0 的有限增量公式.

注意，这个公式对 $\Delta x=0$ 仍然成立.（为什么？）

仔细观察(5)式两边，会给我们怎样的启示?

定理5.1

如果函数 f 在点 x_0 可导，则 f 在点 x_0 连续.

值得注意的是函数在某点连续仅是函数在该点可导的必要条件，并不是充分条件．如例3、例4 中的函数均在 $x = 0$处连续，却不可导.

$$f(x) = |x| \qquad f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x). \qquad (5)$$

例5 证明函数 $f(x)=x^2D(x)$ 仅在 $x=0$ 处可导，其中 $D(x)$ 是熟知的狄利克雷函数.

证 当 $x_0 \neq 0$ 时，用归结原则容易证明 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，由定理 5.1，$f(x)$ 在点 x_0 不可导.

当 $x_0=0$ 时，因为 $|D(x)|\leq 1$，所以有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}xD(x)=0.$$

由于导数是一种极限，因此如同左、右极限那样，可以定义左、右导数（单侧导数）.

定义2

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个右邻域 $[x_0, x_0+\delta)$ 上有定义，如果右极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限为 $f(x)$ 在点 x_0 的右导数，记作 $f'_+(x_0)$． 类似地可以定义左导数，合起来即为

$$\begin{cases} f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \\ f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \end{cases} \tag{6}$$

右导数和左导数统称为单侧导数.

类比左、右极限与极限的关系，我们有

定理5.2

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，则 $f'(x_0)$ 存在的充要条件是 $f'_+(x_0)$，$f'_-(x_0)$ 都存在，且

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0).$$

在讨论分段函数在分段点上的可导性时，本结论很有用处.

例6 设 $f(x)=\begin{cases} 1-\cos x, & x\geq 0, \\ x, & x<0. \end{cases}$

试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右导数和导数.

解 容易看到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 又因

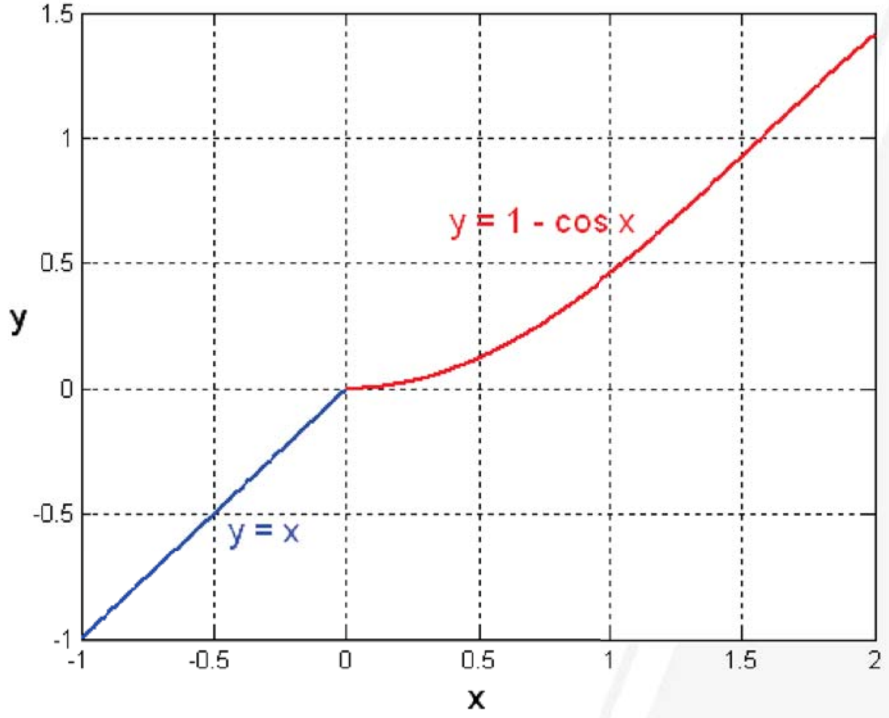
$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\begin{cases} \dfrac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}, & \Delta x>0, \\ 1, & \Delta x<0, \end{cases}$$

所以

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}(\Delta x)^2}{\Delta x}=0$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

由于 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.



1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
y
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
x
y = 1 - cos x
y = x

导函数

如果函数 f 在区间 I 上的每一点都可导 (对于区间端点考虑相应的单侧导数，如左端点考虑右导数)，则称 f 为区间 I 上的可导函数. 此时，对 I 上的任意一点 x 都有 f 的一个导数 $f'(x)$ 与之对应，这就定义了一个在区间 I 上的函数，称为 f 在 I 上的导函数，简称导数. 记作 $f'(x)$, y' 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$,

即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\ x\in I. \qquad (7)$$

注 这里 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 仅为一个记号，学了微分之后就会知道，这个记号实质是一个“微分的商”.

相应地，$f'(x_0)$ 也可表示为

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},\quad \left.y'\right|_{x=x_0},\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$