第八讲

不定式极限（二）

2. $\frac{*}{\infty}$ 型不定式极限

定理6.8

若函数 f 和 g 满足：

(i) $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=\infty$;

(ii) 在点 x_0 的某右邻域 $U_+^\circ(x_0)$ 内二者均可导，

且 $g'(x)\neq 0$;

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ $\big(A$可以为实数，$\pm\infty,\infty\big)$.

则

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

分析 要证明, 对$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当$x_0<x<x_0+\delta$时,

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<A+\varepsilon \text{成立.}$$

证 设A为实数. 对于任意的$\varepsilon>0$, $\exists x_1\in U_+^\circ(x_0)$, 满足不等式 $x_0<x<x_1$ 的每一个 x,

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

由柯西中值定理, 存在$\xi\in(x,x_1)\subset(x_0,x_1)$, 使

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

从而有

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}-A\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad (1)$$

于是

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_1)}{g(x)}\right)\left(\frac{g(x)}{g(x)-g(x_1)}\right)$$

$$=\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}<A+\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

因为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{g(x)}{g(x)-g(x_1)}=1$, 所以由保号性, 存在正数

$\delta_1(<x_1-x_0)$, 使得当 $x_0<x<x_0+\delta_1<x_1$ 时,

$$\frac{g(x)}{g(x)-g(x_1)}>0,$$

从(2)式得

$$\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}<\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$<\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}. \quad (3)$$

由 $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=\infty$, 得

$$\lim_{x\to x_0^+}\left(\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}\right)=A-\frac{\varepsilon}{2};$$

$$\lim_{x\to x_0^+}\left(\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}\right)=A+\frac{\varepsilon}{2};$$

再由保号性得知，

存在正数$\delta(<\delta_1)$，当$x_0 < x < x_0+\delta$时

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<A+\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A.$

思考：若$A=+\infty,-\infty$或∞，应该如何证明？

注 这里的$x\to x_0^+$可以用$x\to x_0^-$，$x\to x_0$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$来替换. 当然定理的条件要作相应的改变.

例7 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

解 这是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

例8 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3}$.

解

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{6x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{6}$$

$$=+\infty.$$

例9 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\sin x}{2x-\sin x}$.

解 这是一个 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式. 如果用洛必达法则,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin x}{2x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\cos x}{2-\cos x}. \tag{4}$$

而极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\cos x}{2-\cos x}$ 不存在, 但是原极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin x}{2x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{\sin x}{x}}{2-\frac{\sin x}{x}}=1.$$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在时, 不能推出 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在.

例10 求极限 $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x}{\arctan 2x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}, \lim\limits_{x\to+\infty}\arctan 2x=\dfrac{\pi}{2}$,

所以 $A=1$.

若错误使用洛必达法则:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{\arctan 2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1+4x^2}{2}=2,$$

这就产生了错误的结果. 这说明: 在使用洛必达法则前，必须首先要判别它究竟是否是 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\bullet}{\infty}$ 型.