第十讲

无穷大量

无穷大量

定义2

设函数 f 在 $U^{\circ}(x_0)$ 有定义，若对于任给$G>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in U^{\circ}(x_0;\delta)\subset U^{\circ}(x_0)$ 时，有

$$|f(x)|>G,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大量，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

若定义中的$|f(x)|>G$ 改为 $f(x)>G$ 或 $f(x)<-G$，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \text{或} \lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty.$$

相应地称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的正无穷大量和负无穷大量.

类似地可以定义如下的无穷大量:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty.$$

请读者自行写出它们的定义.

例3 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

证 $\forall G>0$, 取 $\delta=\dfrac{1}{\sqrt{G}}$, 当 $0<|x|<\delta$ 时, $\dfrac{1}{x^2}>G$,

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

例4 当 $a>1$ 时，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$.

证 $\forall G>0$ (不妨设 $G>1$), 取 $M=\log_a G$, 由对数函数 $\log_a x$ 的严格递增性，当 $x>M$ 时，$a^x>G$,

这就证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$.

例5 证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty.$

证 对$\forall G>0$, 要找到$\delta>0$, 使得$\forall 0<x<\delta$, 有

$$\ln x<-G.$$

由于$\ln x$单调增, 只要取$\delta=\mathrm{e}^{-G}>0$即可.

例6 设$\{a_n\}$递增, 无上界. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

证 因为$\{a_n\}$无上界, 所以任给 $G>0$, 存在 n_0,

使 $a_{n_0}>G$. 又因$\{a_n\}$递增, 故当$n>n_0$ 时, 有

$a_n\ge a_{n_0}>G$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

从无穷大量的定义与例3、例4和例5可以看出：

无穷大量不是很大的一个数，而是具有非正常极限的变量．很明显，若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，那么 $f(x)$ 在 x_0 的任何一个邻域内无界．但值得注意的是：$f(x)$ 在 x_0 的任何邻域内无界（称 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无界量）并不能保证 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 的无穷大量．

例如：$f(x) = x\sin x$ 在 ∞ 的任何邻域内无界，却不是 $x \to \infty$ 时的无穷大量．事实上，对

$$x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad y_n = 2n\pi, \ n = 1, 2, \ldots,$$

有

$$f(x_n) \to \infty, \quad f(y_n) \to 0.$$

因而 $f(x)$不是 $x \to \infty$ 时的无穷大量.

两个无穷大量也可以定义阶的比较 .

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$.

1. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, 则称 $x\to x_0$ 时 $g(x)$是关于 $f(x)$ 的高阶无穷大量.

2. 若存在正数 L,K 和正数 δ, 使 $x\in U^{\circ}(x_0,\delta)$ 时,

$$L\le\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\le K,$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的一个同阶无穷大量.

3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, 则称 $x\to x_0$ 时 $g(x)$是关于 $f(x)$ 的等价无穷大量，记为

$$f(x)\sim g(x),\quad x\to x_0.$$

下述定理反映了无穷小量与无穷大量之间的关系，直观地说：无穷大量与无穷小量构成倒数关系.

定理3.13

(1) 若 f 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量，且不等于零，则 $\dfrac{1}{f}$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷大量.

(2) 若 g 为 $x\to x_0$ 时的无穷大量，则 $\dfrac{1}{g}$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

(1) 若 f 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量，且不等于零，则 $\dfrac{1}{f}$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷大量 .

证 这里仅证明定理的(1)．对于任意正数G，因为 f 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量，所以存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x)| < \frac{1}{G}, \quad 即 \quad \left|\frac{1}{f(x)}\right| > G.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

例7 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b\neq 0$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$，证明

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\infty.$$

证 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b\neq 0$，由极限的保号性，存在 $\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有

$$|f(x)|\geq \frac{|b|}{2}.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$，所以对于任意正数$G$，存在 $\delta_2>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，

$$|g(x)|>\frac{2}{|b|}G.$$

取$\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，就有

$$|f(x)g(x)|\geq\frac{|b|}{2}\cdot\frac{2}{|b|}G=G,$$

即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\infty.$$

注 对于函数 $f(x)=x$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时，有

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=1\neq\infty.$$

这就说明了当$b=0$时结论不一定成立.

例8 设 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的无界量. 证明: 存在 $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty.$$

证 因为 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 为无界量, 所以 $\forall G > 0$, $\forall \delta > 0$, 存在 x_δ, $0 < |x_\delta - x_0| < \delta$, 使得

$$|f(x_\delta)| > G.$$

于是

对 $G_1 = 1$, $\delta_1 = 1$, $\exists x_1$, $0 < |x_1 - x_0| < 1$,

$$|f(x_1)| > 1;$$

对 $G_2 = 2$, $\delta_2 = \frac{1}{2}$, $\exists x_2$, $0 < |x_2 - x_0| < \frac{1}{2}$,

$$|f(x_2)|>2; \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

对 $G_n=n,\ \delta_n=\dfrac{1}{n},\ \exists x_n,\ 0<|x_n-x_0|<\dfrac{1}{n},$

$$|f(x_n)|>n; \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

由此得到一列 $\{x_n\}$，满足 $x_n\neq x_0, x_n\to x_0$，且

$$\lim_{x\to\infty} f(x_n)=\infty.$$

注　例8的证明提供了选取符合要求的点列的一种方法. 熟练地掌握这种方法, 对提高解题能力是有益处的.