第二十三讲

习题课（五）

重要内容回顾

1. 函数凸性的定义及其等价的定义；

2. 凸函数的性质；

3. 可导函数凸性的等价条件；

4. 詹森不等式；

5. 曲线的拐点.

补充例题

例1 证明伯努利(Bernoulli)不等式:

$$(1+x)^{\alpha} \le 1+\alpha x,\quad x>-1,\ 0<\alpha<1;$$

$$(1+x)^{\alpha} \ge 1+\alpha x,\quad x>-1,\ \alpha>1.$$

并且当且仅当 $x=0$ 时等号成立.

证 令 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\because f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$,

$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}.$$

当 $x>-1,\ 0<\alpha<1$时, $f''(x)<0$, 所以 $f(x)$ 是严格凹函数, 因此当 $x>-1$ 时有

$$f(x)\le f(0)+f'(0)x,$$

即
$$(1+x)^{\alpha}\le 1+\alpha x.$$

例2 设 $f(x)$是开区间I上的凸函数，则对任意闭区间$[a,b]\subset I$，$f(x)$满足利普希茨(Lipschitz)条件，即$\exists L>0$，对$\forall x',x''\in[a,b]$，有

$$|f(x'')-f(x')|\le L|x''-x'|.$$

证 设 $x'<x''$，$\because [a,b]\subset I$(开区间)，$\therefore\ \exists a',b'\in I$，使$a'<a<x'<x''<b<b'$，根据凸函数的性质，有

$$\frac{f(a)-f(a')}{a-a'}\le\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}\le\frac{f(b')-f(b)}{b'-b},$$

于是

$$\left|\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}\right|\le\max\left\{\left|\frac{f(b')-f(b)}{b'-b}\right|,\left|\frac{f(a)-f(a')}{a-a'}\right|,1\right\}$$

$$=L\,(>0).$$

例3 证明不等式$\sin\pi x \le \dfrac{\pi^2}{2}x(1-x),\quad x\in[0,1].$

证 令 $f(x)=\sin\pi x-\dfrac{\pi^2}{2}x(1-x),\ x\in[0,1],$

则 $f'(x)=\pi\cos\pi x-\dfrac{\pi^2}{2}+\pi^2 x,$

$$f''(x)=-\pi^2\sin\pi x+\pi^2\ge 0.$$

所以 $f(x)$是$[0,1]$上的连续凸函数，其最大值在端点取得，因此 $f(x)\le\max\{f(0),f(1)\}=0,\ x\in[0,1],$

即

$$\sin\pi x\le\frac{\pi^2}{2}x(1-x),\quad x\in[0,1].$$

本题也可用单调性证明.

例4 利用凸性证明当 $x_i > 0$, 且$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)^2 \geq \frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}$$

证 将需要证明的不等式改写为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)^2 \geq \frac{(n^2+1)^2}{n^2} = \left(n+\frac{1}{n}\right)^2 = \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\frac{1}{n}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + 1\Big/\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

提醒我们想到利用詹森不等式，为此令

$$f(x) = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2,\ (x>0).$$

有$f''(x)=2+\dfrac{6}{x^4}>0$，所以$f(x)$是$(0,+\infty)$上的凸函数，

故对任意的 $x_i>0$, $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$, $\lambda_i=\dfrac{1}{n}\,(i=1,2,\cdots)$，有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\ge f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

因此

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)^2\ge\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i+1\Big/\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=\left(\frac{1}{n}+n\right)^2$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)^2\ge\frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

例5 利用詹森不等式证明: 对 $\forall a_i > 0,\ i = 1,2,\cdots n$, 有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

证 令 $f(x) = \ln x,\ x > 0$, 则 $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$,

所以 $f(x)$是 $(0,+\infty)$ 上严格凹函数，故对 $\forall x_i > 0$,

$\lambda_i \in (0,1)$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$, 由詹森不等式，得

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \ge \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \ln x_i = \ln(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}),$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \ge x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}. \qquad (*)$$

令 $x_i = a_i,\ \lambda_i = \dfrac{1}{n}$, 代入(*) 式，得到

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

再令 $x_i = \dfrac{1}{a_i},\ \lambda_i = \dfrac{1}{n}$, 代入(*) 式，又得到

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}},$$

两边取倒数，即有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

等号成立当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

总结 不等式的证明可用:

1. 中值定理;

2. 函数的单调性;

3. 极大极小值、最大最小值;

4. 凸性、詹森不等式.