第二章 数列极限

§1 数列极限概念

一、数列极限的定义

函数 $f:N_+\to\mathbf{R},n\mapsto f(n)$ 称为**数列**。$f(n)$ 通常记作

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

或简单地记作$\{a_n\}$，其中 a_n 称为该数列的**通项**。

例如：$\{a_n\}:1,\dfrac{1}{2},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$，通项 $a_n=\dfrac{1}{n}$。

如何描述一个数列"随着 n 的无限增大，a_n 无限地接近某一常数"。下面给出数列极限的精确定义。

定义 1　设$\{a_n\}$为数列，a 为定数. 若对任给的正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

则称**数列$\{a_n\}$收敛于** a，定数 a 称为数列$\{a_n\}$的**极限**，并记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a\text{，或 }a_n\to a(n\to\infty)$$

读作"当 n 趋于无穷大时，$\{a_n\}$的极限等于 a 或 a_n 趋于 a".

若数列$\{a_n\}$没有极限，则称$\{a_n\}$不收敛，或称$\{a_n\}$为**发散数列**.

【注】该定义通常称为数列极限的"$\varepsilon-N$ 定义"。

例 1　设 $a_n=c$（常数），证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$.

证　对 $\forall\varepsilon>0$，因为

$$|a_n-c|=|c-c|=0<\varepsilon$$

恒成立，因此，只要取 $N=1$，当 $n>N$ 时，便有

$$|a_n-c|<\varepsilon$$

这就证得$\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

例 2　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0\ (\alpha > 0)$.

证　对$\forall\varepsilon > 0$，要

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

只要

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

只要取$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$，则当$n > N$时，便有

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

这就证得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$。

例 3　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$.

证 因为

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

对$\forall\varepsilon > 0$，取$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$，则当$n > N$时，便有

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

这就证得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$。

关于数列极限的“$\varepsilon - N$定义”，作以下几点说明：

【1】定义中N不一定取正整数，可换成某个正实数。

即　$\forall\varepsilon > 0$，$\exists G > 0$，当$n > G$时，有$|a_n - a| < \varepsilon$。

【2】定义中$|a_n - a| < \varepsilon$可换成：$|a_n - a| \le c\varepsilon$（$c > 0$为常数）。

即　$\forall\varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当$n > N$时，有$|a_n - a| \le c\varepsilon$。

【3】定义中$\forall\varepsilon>0$可换成：$\forall 0<\varepsilon<\varepsilon_0$。

例 4　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$，这里$\alpha$为正数.

证　对$\forall\varepsilon>0$，要

$$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|=\frac{1}{n^\alpha}<\varepsilon$$

只要

$$n>\frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}$$

（注：上式用到幂函数$x^{\frac{1}{\alpha}}(x>0)$是增函数）。

只要取$N=\frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}$，则当$n>N$时，便有

$$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|=\frac{1}{n^\alpha}<\varepsilon$$

例 5　证明$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，这里$|q|<1$.

证法 1　若$q=0$，则结果是显然的.

现设 $0<|q|<1$. 记$h=\frac{1}{|q|}-1>0$，有

$$|q^n-0|=|q|^n=\frac{1}{(1+h)^n}$$

由$(1+h)^n\geq 1+nh$（二项展开或伯努利不等式）得到

$$|q|^n\leq\frac{1}{1+nh}<\frac{1}{nh}$$

对任给的$\varepsilon>0,$只要取$N=\frac{1}{\varepsilon h},$则当$n>N$时，便有$|q^n-0|<\varepsilon$。

证法 2　利用对数函数$y=\lg x$的严格增性来证明。设$0<|q|<1$。

对任给的$\varepsilon>0$（不妨设$\varepsilon<1$），为使$|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon$，只要

$$n\lg|q|<\lg\varepsilon\quad 即\quad n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$$

（注意分子分母都是负数）。于是，只要取$N=\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$即可。

例 6　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，其中 a>0。

证　（1）当 $a=1$ 时，结论显然成立.

（2）当 $a>1$ 时，记 $\alpha=a^{1/n}-1$，则 $\alpha>0$（因为 a^x 增，$a^{1/n}>a^0=1$）.由

$$a=(1+\alpha)^n\geq 1+n\alpha=1+n(a^{1/n}-1)$$

得

$$a^{\frac{1}{n}}-1\leq\frac{a-1}{n}$$

任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\dfrac{a-1}{\varepsilon}$ 时，则当 $n>N$，便有

$$a^{1/n}-1\leq\frac{a-1}{n}<\varepsilon$$

（3）当 $0<a<1$ 时，令 $b=\dfrac{1}{a}$>1，从而

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=\frac{\sqrt[n]{b}-1}{\sqrt[n]{b}}\leq\sqrt[n]{b}-1$$

利用（2）的结果，得证。

例 7　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证　设 $n\geq 2$。记

$$h_n=\sqrt[n]{n}-1>0$$

则有（由二项展开）

$$n=\left(1+h_n\right)^n=1+nh_n+\frac{n\left(n-1\right)}{2}h_n{}^2+\cdots>\frac{n\left(n-1\right)}{2}h_n^2\geq\frac{n^2}{4}h_n^2$$

得

$$0<h_n<\frac{2}{\sqrt{n}}$$

取 $N=\max\left\{2,\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$h_n=\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon$$

下面是数列极限“$\varepsilon-N$ 定义”，否定形式：

数列$\{a_n\}$不以a为极限的定义：

$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N\in N_+$，$\exists n_0>N$，使得$|a_{n_0}-a|\ge\varepsilon_0$。

数列$\{a_n\}$发散的定义：

$\forall a\in\mathbf{R}$，$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N\in N_+$，$\exists n_0>N$，使得$|a_{n_0}-a|\ge\varepsilon_0$。

例 8　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\ne 0$.

证　因为

$$\left|\frac{n+1}{n}-0\right|=1+\frac{1}{n}>1$$

所以，取$\varepsilon_0=1$，对$\forall N\in N_+$，取$n_0=N+1>N$，有

$$\left|\frac{n_0+1}{n_0}-0\right|=1+\frac{1}{n_0}\ge\varepsilon_0=1$$

例 9　证明$\left\{(-1)^n\right\}$是发散数列.

证　对任何$a\in\mathbf{R}$,

当$a\ge 0$时，取$\varepsilon_0=1$，则对所有奇数n，有$|(-1)^n-a|=1+a\ge\varepsilon_0$

当$a<0$时，取$\varepsilon_0=1$，对所有偶数n，有$|(-1)^n-a|=1+|a|\ge\varepsilon_0$

二、数列极限“几何定义”

画图对定义 1 作几何解释（待补）。

定义 2　任给ε>0，若在$\mathrm{U}(a,\varepsilon)$之外数列$\{a_n\}$中的项至多只有有限个，则称数列$\{a_n\}$收敛于极限$a$.

其否定形式：

若存在常数$\varepsilon_0>0$，使得数列$\{a_n\}$中有无穷多个项落在$\mathrm{U}(a,\varepsilon)$之外，则$\{a_n\}$一定不以$a$为极限.

例 10　设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，做数列$\{z_n\}$如下：

$$\{z_n\}:x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n,\cdots.$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a.$

证　因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$，故对任给的 $\varepsilon > 0$，数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 中落在 $U(a,\varepsilon)$ 之外的项都至多只有有限个．所以数列 $\{z_n\}$ 中落在 $U(a,\varepsilon)$ 之外的项也至多只有有限个．故由定义 2 证得 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$．

【注】上面例题是以后常用的结论。下面用子列的概念改写成定理。

定理　对于数列 $\left\{a_n\right\}$，如果它的奇子列与偶子列都收敛于同一个数 a，则 $\left\{a_n\right\}$ 也收敛于 a。即如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$。

例 11　设 $\{a_n\}$ 为给定的数列，$\{b_n\}$ 为对 $\{a_n\}$ 增加、减少或改变有限项之后得到的数列．证明：数列 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 同时为收敛或发散，且在收敛时两者的极限相等．

证　设 $\{a_n\}$ 为收敛数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$．按定义 2，对任给的 ε>0，数列 $\{a_n\}$ 中落在 $U(a;\varepsilon)$ 之外的项至多只有有限个．而数列 $\{b_n\}$ 是对 $\{a_n\}$ 增加、减少或改变有限项之后得到的，故从某一项开始，$\{b_n\}$ 中的每一项都是 $\{a_n\}$ 中确定的一项，所以 $\{b_n\}$ 中落在 $U(a,\varepsilon)$ 之外的项也至多只有有限个．这就证得 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$．

设 $\{a_n\}$ 发散．倘若 $\{b_n\}$ 收敛，则因 $\{a_n\}$ 可看成是对 $\{b_n\}$ 增加、减少或改变有限项之后得到的数列，故由刚才所证，$\{a_n\}$ 收敛，矛盾．所以当 $\{a_n\}$ 发散时，$\{b_n\}$ 也发散．

三、无穷小与无穷大，有界与无界

在所有收敛数列中，有一类重要的数列，称为无穷小数列，其定义如下：

定义 3

（1）若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则称 $\{a_n\}$ 为**无穷小数列**.

（2）$\forall G > 0, \exists N \in N_+$, 当 $n > N$ 时，有 $a_n > G$，则称 $\{a_n\}$ 为**正无穷大数列**，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$。

（3）类似可定义：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

（4）类似可定义：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$。

定义 4　如果$\{a_n\}$有界（同函数有界），即

$$\exists M>0,\ \forall n\in N_+,\ 都有\left|a_n\right|\le M$$

则称$\{a_n\}$是**有界数列**。

类似可定义：无界数列，有上界，无上界等。

下面列几个显然成立的结论（作为习题）：

（1）　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\Leftrightarrow\{a_n-a\}$为无穷小数列.

（2）　$\{a_n\}(a_n\ne 0)$为无穷小$\Leftrightarrow\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是无穷大。

（3）　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty\Rightarrow\left\{a_n\right\}$无上界，但反之不然。

（4）　无穷小数列与有界数列的乘积仍是无穷小数列。

最后再举几个例题，这些例题都是以后常用的结论。

例 12　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n\right|=\left|a\right|$。反之不然。

证　设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，据定义$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,$当$n>N$时，有$\left|a_n-a\right|<\varepsilon$，从而$\left|\left|a_n\right|-\left|a\right|\right|\le\left|a_n-a\right|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n\right|=\left|a\right|$。

反之，设$\left\{a_n\right\}:1,-1,1,-1,\cdots$。显然$\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n\right|=1$，但$\left\{a_n\right\}$发散。

【注】　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n\right|=0$。

例 13　设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=A(A\ne 0,b_n\ne 0)$，如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$。

证　由上例，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|a_n\right|}{\left|b_n\right|}=\left|A\right|>0$，据定义，对$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}\left|A\right|>0,\exists N_1\in N_+,$当$n>N_1$时，有

$$\left|A\right|-\frac{1}{2}\left|A\right|<\frac{\left|a_n\right|}{\left|b_n\right|}<\left|A\right|+\frac{1}{2}\left|A\right|$$

即

$$\frac{1}{2}\left|A\right|\left|b_n\right|<\left|a_n\right|<\frac{3}{2}\left|A\right|\left|b_n\right|$$

再由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，据定义对$\forall\varepsilon>0,\exists N_2\in N_+$, 当$n>N_2$时，有$\left|a_n\right|<\varepsilon$。

于是，取$N=\max\{N_1,N_2\}$，则当$n>N$时，有

$$\frac{1}{2}|A||b_n|<|a_n|<\varepsilon\Rightarrow|b_n|<\frac{2}{|A|}\varepsilon$$

按定义这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$。

例 14　设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

证 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，于是有$\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in N_+,\forall n>N_1,\left|a_n-a\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

从而当$n>N_1$时，有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|=\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|$$

$$\le\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\frac{|a_{N_1+1}-a|+|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}$$

$$<\frac{A}{n}+\frac{(n-N_1)}{n}\frac{\varepsilon}{2}<\frac{A}{n}+\frac{\varepsilon}{2}$$

其中$A=|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|$是一个定数。

再由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A}{n}=0$，知$\exists N_2\in N_+$，当$n>N_2$时，有$\dfrac{A}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

取$N=\max(N_1,N_2)$，则当$n>N$时, 有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\frac{A}{n}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

【注】该结论反之不成立。例如$a_n=(-1)^n$不收敛，但$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$。

§2 收敛数列的性质

定理 1（唯一性）　若数列$\{a_n\}$收敛，则它只有一个极限．

证　设a是$\{a_n\}$的一个极限．我们证明：对任何数$b \neq a, b$不是$\{a_n\}$的极限．事实上，若取$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}|b-a|$，则按定义，在 U($a\ ;\varepsilon_0$)之外至多只有$\{a_n\}$中有限项，从而在 U($b;\varepsilon_0$)内至多只有$\{a_n\}$中有限个项；所以$b$不是$\{a_n\}$的极限．这就证明了收敛数列只能有一个极限

定理 2（有界性）　若数列$\{a_n\}$收敛，则$\{a_n\}$为有界数列，即存在正数M，使得对一切正整数n，都有

$$|a_n| \leq M$$

证　设$\lim_{n\to\infty} a_n = a$，取$\varepsilon = 1$，存在正数$N$，对一切$n > N$，有

$$|a_n - a| < 1，即\quad a-1 < a_n < a+1.$$

记

$$M = \max\{|a_1|,|a_2|,\cdots|a_N|,|a-1|,|a+1|\},$$

则对一切正整数n，都有$|a_n| \leq M$．

定理 3（保号性）　若$\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$，则对任何$a' \in (0,a)$，存在正数$N$，使得当$n > N$时，有$a_n > a'$．

证　取$\varepsilon_0 = a - a' > 0$，则$\exists N > 0$，使得当$n > N$时，有

$$a_n > a - \varepsilon_0 = a'$$

类似地有当$a < 0$时的保号性.

【注】在应用保号性时，经常取$a' = \frac{a}{2}$.

定理 4（保不等式性）　设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为收敛数列．若存在正数N_0，使得当$n > N_0$时，有$a_n < b_n$，则

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$$

证　设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b.$ 任给 $\varepsilon > 0,$ 分别存在正数 N_1 与 N_2，使得当 $n > N_1$ 时，有

$$a - \varepsilon < a_n\,, \tag{1}$$

当 $n > N_2$ 时有

$$b_n < b + \varepsilon\,. \tag{2}$$

取　$N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，按假设及不等式(1)和(2)有

$$a - \varepsilon < a_n \le b_n < b + \varepsilon,$$

由此得到 $a < b + 2\varepsilon$。由 ε 的任意性推得 $a \le b$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

【思考】如果把定理中的条件 $a_n \le b_n$ 换成严格不等式 $a_n < b_n$，那么能否把结论换成 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$？

例如：$a_n = 0, b_n = \dfrac{1}{n}$

例 1　设 $a_n \ge 0\,(n = 1, 2, \cdots)$．证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,$ 则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}. \tag{3}$$

证　由保不等式性得 $a \ge 0.$

若 $a = 0$，则由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，任给 $\varepsilon > 0$，存在正数 N，使得当 $n > N$ 时有 $a_n < \varepsilon^2$，从而 $\sqrt{a_n} < \varepsilon$，即 $\left|\sqrt{a_n} - 0\right| < \varepsilon,$ 故有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = 0.$

若 $a > 0$，则有

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \le \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}}\,.$$

任给 $\varepsilon > 0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，存在正数 N，使得当 $n > N$ 时有

$$|a_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon,$$

从而 $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| < \varepsilon$．(3)式得证．

定理 6（迫敛性） 设收敛数列$\{a_n\},\{b_n\}$都以a为极限，数列$\{c_n\}$满足：存在正数N_0，当$n>N_0$时有

$$a_n \le c_n \le b_n, \tag{4}$$

则数列$\{c_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

证　任给$\varepsilon>0$，由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=a$，分别存在正数$N_1$与$N_2$，使得当$n>N_1$时，有

$$a-\varepsilon<a_n, \tag{5}$$

当$n>N_2$时,有

$$b_n<a+\varepsilon. \tag{6}$$

取$N=\max\{N_0,N_1,N_2\}$,，则当$n>N$时,不等式(4)、(5)、(6)同时成立，即有

$$a-\varepsilon<a_n\le c_n\le b_n<a+\varepsilon.$$

从而有$|c_n-a|<\varepsilon$，这就证得所要的结果.

例 2　[习题 2.2：10]　设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，证明:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[na_n]}{n}=a$；　　(2) 若$a>0,a_n>0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$。

证

(1) 因为$na_n-1<[na_n]\le na_n$，所以

$$a_n-\frac{1}{n}<\frac{[na_n]}{n}\le a_n$$

由迫敛性得证。

(2) 因为$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a>0$，取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}a$，则存在$N>0$，使得当$n>N$时，有

$$\frac{1}{2}a=a-\varepsilon_0<a_n<a+\varepsilon_0=\frac{3}{2}a。$$

于是

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}a}<\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{\frac{3}{2}a}$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}a}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3}{2}a}=1$和迫敛性得证。

定理 6（四则运算法则）　若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$为收敛数列，则$\{a_n+b_n\}$，$\{a_n-b_n\}$，$\{a_n.b_n\}$也都是收敛数列，且有

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n.b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n.\lim_{n\to\infty}b_n.$$

特别当b_n为常数c时有

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+c)=\lim_{n\to\infty}a_n+c,\lim_{n\to\infty}ca_n=c\lim_{n\to\infty}a_n.$$

若再假设$b_n\neq 0$及$\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$，则$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$也是收敛数列，且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n\Big/\lim_{n\to\infty}b_n.$$

证　由于$a_n-b_n=a_n+(-1)b_n$及$\frac{a_n}{b_n}=a_n.\frac{1}{b_n}$，因此我们只须证明关于和、积与倒数运算的结论即可.

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b,$则对任给的$\varepsilon>0,$分别存在正数$N_1$与$N_2$，使得

$$|a_n-b_n|<\varepsilon,\text{当}n>N_1,$$

$$|b_n-b|<\varepsilon,\text{当}n>N_2.$$

取$N=\max\{N_1,N_2\},$则当$n>N$时上述两不等式同时成立，从而有

1. $|(a_n+b_n)-(a+b)|\le|a_n-a|+|b_n-b|<2\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b.$

2. $|a_nb_n-ab|=|(a_n-a)b_n+a(b_n-b)|\le|a_n-a||b_n|+|a||b_n-b|.$　　（8）

由收敛数列的有界性定理，存在正数M，对一切n有$|b_n|<M$. 于是，当$n>N$时由（8）式可得

$$|a_nb_n-ab|<(M+|a|)\varepsilon.$$

得$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=ab$.

3．由于 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, 根据收敛数列的保号性，存在正数 N_3，则当 $n > N_3$ 时有 $|b_n| > \frac{1}{2}|b|$. 取 $N' = \max\{N_2, N_3\}$, 则当 $n > N'$ 时有

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} < \frac{2|b_n - b|}{b^2} < \frac{2}{b^2}\varepsilon$$

得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.

例 3［第二章总练习题：3］　设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 证明:

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$（又问由此等式能否反过来推出 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$）;

（2）若 $a_n > 0, (n = 1, 2, \cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = a$。

证　（1）见前。

（2）由 $a_n > 0, (n = 1, 2, \cdots)$，知 $a \geq 0$。

若 $a > 0$，根据平均值不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$，以及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}} = \frac{1}{\frac{1}{a}} = a,$$

由迫敛性得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = a$。

若 $a = 0$，　$0 \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$

同样由迫敛性得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = 0$。

例 4　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0}$

【讲课时换成具体的，分三种情况】

例 5 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

解 $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}$,

由$1+\dfrac{1}{n}\to 1(n\to\infty)$及例 1 得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}.$$

例 6［习题 2.2：4(6)］ $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}})$.

解 由

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=1$$

由迫敛性，$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}})=1$

【注】错误的做法：

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=0$$

定义 1 设$\{a_n\}$为数列，$\{n_k\}$为正整数集N_+的无限子集，且$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$,则数列

$$a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots$$

称为数列$\{a_n\}$的一个**子列**,简记为$\{a_{n_k}\}$.

注 1 由定义 **1** 可见，$\{a_n\}$的子列$\{a_{n_k}\}$的各项都选自$\{a_n\}$，且保持这些项在$\{a_n\}$中的

先后次序．$\{a_{n_k}\}$中的第k项是$\{a_n\}$中的第n_k项，故总有$n_k \ge k$．实际上$\{n_k\}$本身也是正整数列$\{n\}$的子列．

例如，子列$\{a_{2k}\}$由数列$\{a_n\}$的所有偶数项所组成，而子列$\{a_{2k-1}\}$则由$\{a_n\}$的所有奇数项所组成．又$\{a_n\}$本身也是$\{a_n\}$的一个子列，此时$n_k = k$，$k = 1,2$，….

定理 8　若数列$\{a_n\}$收敛于a，则$\{a_n\}$的任何子列都收敛且极限都为a．

证　设$\{a_{n_k}\}$是$\{a_n\}$的任一子列，由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，使得当$k > N$时，有

$$|a_k - a| < \varepsilon$$

由于$n_k \ge k$，故当$k > N$时，有$n_k > N$，从而也有

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon$$

这就证得$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$．

【注】我们常利用该定理证明$\{a_n\}$发散。

（1）若$\{a_n\}$有一个子列不收敛，则$\{a_n\}$发散;

（2）若$\{a_n\}$有两个收敛子列，但极限不等，则$\{a_n\}$发散。

例 7　证明数列$\{(-1)^n\}$与$\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$都发散。

证　$\{(-1)^n\}$的奇子列收敛于-1，偶子列收敛于1，故$\{(-1)^n\}$发散。

$\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$的奇子列为$\left\{\sin\dfrac{2k-1}{2}\pi\right\}$即$\left\{(-1)^{k-1}\right\}$，它是发散的，故$\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$发散。

定理 9　$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

见前

§3 数列极限存在的条件

定义 1　若数列$\{a_n\}$的各项满足关系式$a_n \le a_{n+1}$，则称$\{a_n\}$为<u>**递增数列**</u>. 若数列$\{a_n\}$的各项满足关系式$a_n < a_{n+1}$，则称$\{a_n\}$为<u>**严格递增数列**</u>.

类似定义递减与严格递减数列。（严格）递增数列和（严格）递减数列统称为（严格）**单调数列**.

定理 1（单调有界定理）　有界的单调数列必有极限.

证　不妨设$\{a_n\}$为有上界的递增数列. 由确界原理，数列$\{a_n\}$有上确界，记$a=\sup\{a_n\}$. 下面证明a就是$\{a_n\}$的极限. 事实上，任给$\varepsilon>0$，按上确界的定义，存在数列$\{a_n\}$中某一项a_N，使得$a-\varepsilon<a_N$. 又由$\{a_n\}$的递增性，当$n>N$时有

$$a-\varepsilon<a_N\le a_n.$$

另一方面，由于a是$\{a_n\}$的一个上界，故对一切a_n都有$a_n\le a<a+\varepsilon$. 所以当$n>N$时有

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

同理可证有下界的递减数列必有极限，且其极限即为它的下确界.

例 1　设$a_n=1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\dfrac{1}{3^\alpha}+\ldots+\dfrac{1}{n^\alpha},\alpha>1$.证明：$\{a_n\}$收敛.

证　显然$\{a_n\}$是递增的。下证$\{a_n\}$有上界. 当$n\ge 2$时，

$$\begin{aligned}a_{2n}&\le 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n)^\alpha}=\left(1+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n)^\alpha}\right)\\&<\left(1+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n)^\alpha}\right)\\&<\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n)^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n)^\alpha}\right)\end{aligned}$$

$$=1+\frac{1}{2^\alpha}\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\right)+\frac{1}{2^\alpha}\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\right)=1+2\frac{a_n}{2^\alpha}$$

再由 $a_n<a_{2n}$，得 $a_n<1+2\frac{a_n}{2^\alpha}$，从而

$$a_n<\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}$$

故 $\{a_n\}$ 有界。由单调有界定理，$\{a_n\}$ 收敛。

例 2 [习题 2.3：3（2）]　设 $a_1=\sqrt{c}(c>0),a_{n+1}=\sqrt{c+a_n},n=1,2,\cdots$，证明 $\{a_n\}$ 极限存在并求其值。

证 首先证明 $\{a_n\}$ 单调增。

$a_2=\sqrt{c+\sqrt{c}}>\sqrt{c}=a_1$，设 $a_n>a_{n-1}$，则 $a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}>\sqrt{c+a_{n-1}}=a_n$

由数学归纳法知 $\{a_n\}$ 单调增。

其次证明 $\{a_n\}$ 有上界，其中一个上界是 $\sqrt{c}+1$。

$a_1=\sqrt{c}<\sqrt{c}+1$，设 $a_{n-1}<\sqrt{c}+1$，则

$$a_n=\sqrt{c+a_{n-1}}<\sqrt{c+\sqrt{c}+1}<\sqrt{c+2\sqrt{c}+1}=\sqrt{c}+1$$

由数学归纳法知 $\{a_n\}$ 有上界 $\sqrt{c}+1$。

由单调有界定理 $\{a_n\}$ 必有极限。设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，由保不等式性 $A\ge 0$。在 $a_{n+1}^2=c+a_n$ 两边取极限, 得 $A^2=c+A$，解得 $A=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$。（另一根 $A=\frac{1-\sqrt{1+4c}}{2}<0$ 不合题意）。

【**注**】（1）因为单调有界数列的极限是其确界，所以 $\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$ 是其一个上界，证明的过程中也可以验证它是上界。

（2）上面方法是把这个上界又给予了放大。

$$\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}<\frac{1+\sqrt{1+4c+(2\sqrt{c})^2}}{2}=\frac{1+1+2\sqrt{c}}{2}=1+\sqrt{c}$$

例 3　[第二章总练习题：7]　设 $a>0,\sigma>0,$

$$a_1=\frac{1}{2}(a+\frac{\sigma}{a}),a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{\sigma}{a_n}),n=1,2,\cdots 。$$

证明:数列$\{a_n\}$收敛,且其极限为$\sqrt{\sigma}$.

证　由$a_n-\sqrt{\sigma}=\frac{1}{2}(a_{n-1}+\frac{\sigma}{a_{n-1}}-2\sqrt{\sigma})=\frac{1}{2}(\sqrt{a_{n-1}}-\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{a_{n-1}}})^2\geq 0$得

$$a_n\geq\sqrt{\sigma},n=2,3,\cdots,$$

说明$\{a_n\}$有下界。又

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{\sigma}{a_n}-2a_n)=\frac{1}{2a_n}(\sigma-a_n^2)\leq 0\ ,n=2,3,\cdots$$

得$\{a_n\}(n=2,3,\cdots)$递减。

由单调有界定理$\{a_n\}$的极限存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$。在

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{\sigma}{a_n})$$

两边取极限得

$$a=\frac{1}{2}(a+\frac{\sigma}{a})$$

解得$a=\sqrt{\sigma}$（$a=-\sqrt{\sigma}$舍掉）。

【注】 这是求方程$x^2-\sigma=0$正根的Newton迭代法。以$\sigma=2$为例计算结果如下

k	x_k
1	1.50000000000000
2	1.41666666666667
3	1.41421568627451
4	1.41421356237469
5	1.41421356237309

例 4　设S为有界数集．证明：若$\sup S=a\overline{\in}S$，则存在严格递增数列$\{x_n\}\subset S$，使得$\lim\limits_{n\leftrightarrow\infty}x_n=a$.

证　因a是S的上确界，故对任给的$\varepsilon>0,$存在$x\in S,$使得$x>a-\varepsilon$．又因$a\overline{\in}S$，故$x<a$，从而有$a-\varepsilon<x<a$.

现取$\varepsilon_1 = 1$，则存在$x_1 \in S$，使得

$$a - \varepsilon_1 < x_1 < a$$

再取$\varepsilon_2 = \min\left\{\frac{1}{2}, a - x_1\right\} > 0$，则存在$x_2 \in S$，使得

$$a - \varepsilon_2 < x_2 < a,$$

且有$x_2 > a - \varepsilon_2 \ge a - (a - x_1) = x_1$.

一般地，按上述步骤得到$x_{n-1} \in S$之后，取$\varepsilon_n = \min\left\{\frac{1}{n}, a - x_{n-1}\right\}$，则存在$x_n \in S$，使得

$$a - \varepsilon_n < x_n < a,$$

且有$x_n > a - \varepsilon_n \ge a - (a - x_{n-1}) = x_{n-1.}$

上述过程无限地进行下去，得到数列$\{x_n\} \subset$S，它是严格递增数列，且满足

$$a - \varepsilon_n < x_n < a < a + \varepsilon_n \Rightarrow | x_n - a | < \varepsilon_n \le \frac{1}{n}, n = 1,2,\cdots.$$

这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

例 5　证明$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$存在.

证　由二项式

$$\begin{aligned}a_n = (1+\frac{1}{n})^n &= 1 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\frac{1}{n^2} + \cdots + C_n^k\frac{1}{n^k} + \cdots + C_n^n\frac{1}{n^n}\\ &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n}\\ &= 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})\\ &< 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1}) + \cdots\\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}) = a_{n+1}\end{aligned}$$

故$\{a_n\}$严格递增。再由上式

$$a_n <= 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(k-1)k} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$=2+(1-\frac{1}{2})+\cdots+(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=3-\frac{1}{n}<3$$

故$\{a_n\}$有上界增。由单调有界定理$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$存在。记

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e\approx 2.718$$

以e为底的对数称为**自然对数**，通常记

$$\ln x=\log_e x$$

定理 2（致密性定理）有界数列必有收敛子列。

证 先证明：**任何数列都有单调子列**。

设数列为$\{a_n\}$。分两种情况讨论：

（1）若对任何正整数k，数列$\{a_{k+n}\}$有最大项。设$\{a_{1+n}\}$的最大项为a_{n_1}，$\{a_{n_1+n}\}$的最大项为a_{n_2}，依次下去。显然

$$a_{n_1}\ge a_{n_2}\ge\cdots,(n_1<n_2<\cdots)$$

这样就得到递减的子列$\{a_{n_k}\}$。

（2）至少存在某正整数k，数列$\{a_{k+n}\}$没有最大项。取$n_1=k+1$，因$\{a_{k+n}\}$没有最大项，故在a_{n_1}后面总存在$a_{n_2}(n_2>n_1)$，使得

$a_{n_2}>a_{n_1}$

同理存在$n_3>n_2$，使得

$$a_{n_3}>a_{n_2}$$

如此下去，就得到严格递增的子列$\{a_{n_k}\}$。

再证明致密性定理。

由任何数列都有单调子列以及单调有界定理立即得证。

定理 3（柯西(Cauchy)收敛准则）　数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是：对任给的$\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当$n,m>N$时有

$$|a_n-a_m|<\varepsilon.$$

证　必要性易证。现证充分性。

先证有界性：取 $\varepsilon_0 = 1$， $\exists N_0 \in N_+, \forall n > N,$ 有

$$a_{N_0+1} - 1 < a_n < a_{N_0+1} + 1$$

此时， $|a_n| \le \max\left\{|a_{N_0+1} - 1|, |a_{N_0+1} + 1|\right\} \Rightarrow |a_n| \le |a_{N_0+1}| + 1$

令 $M = \max\left\{|a_1|, \cdots, |a_{N_0}|, |a_{N_0+1}| + 1\right\}$， 则

$$|a_n| \le M, \forall n$$

由致密性定理，$\{a_n\}$ 必有收敛子列，设 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \xi$ 。根据定义

$\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists K$ ， 当 $k > K$ 时，有

$$|a_{n_k} - \xi| < \varepsilon$$

由 Cauchy 条件，　$\exists N$ ，当 $n, m > N$ 时，有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon .$$

取 $k_0 = \max(K, N) + 1,$ ，此时 $k_0 > K, n_{k_0} \ge k_0 > N$ ，于是当 $n > N$ 时，有

$$|a_n - \xi| \le |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - \xi| < 2\varepsilon$$

例 6 ［习题 2. 3：5］应用柯西收敛准则, 证明以下数列$\{a_n\}$收敛:

(1) $a_n = \dfrac{\sin 1}{2} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \dfrac{\sin n}{2^n};$

(2) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}.$

证（1） $|a_{n+p} - a_n| = \left|\dfrac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \dfrac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \cdots + \dfrac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|$

$$\le \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^n}(1 - \frac{1}{2^p}) < \frac{1}{2^n}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ ， $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists N$ ， 当 $n > N$ 时，有 $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$ ，

从而当 $n > N$ 时，对 $\forall p$ ，有 $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ 。由柯西准则, $\{a_n\}$ 收敛。

(2) $|a_{n+p} - a_n| = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+p)^2}$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$$

类同(1)可证$\{a_n\}$收敛。

例 7 ［第二章总练习题：9(3)］ 按柯西收敛准则叙述数列$\{a_n\}$发散的充要条件, 并用它证明下列数列$\{a_n\}$是发散的:

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

证：$\{a_n\}$发散的充要条件是$\exists\varepsilon_0>0,\forall N,\exists m,n>N$, 使得$|a_m-a_n|\geq\varepsilon_0$。

取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$, 对任意大的$N$, 取$n>N,m=2n$，则

$$|a_m-a_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}=\varepsilon_0$$

例 8 ［几个正无穷大的比较］

$$[\log_a n]^\beta\,(a>1,\beta>0)\ll n^\alpha\,(\alpha>0)\ll a^n\,(a>1)\ll n!\ll n^n$$

证 （1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$ ［习题 2.1：2（3)］

$$\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}\leq\frac{1}{n}$$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0(a>1)$ ［习题 2.3：3（3)］

记$a_n=\frac{a^n}{n!}$， 则$a_{n+1}=\frac{a}{n+1}a_n$， 取$n_0>a$， 当$n>n_0$时， $a_{n+1}<a_n$， $\{a_n\}$单调减且有下界零，故有极限，记极限为A。在$a_{n+1}=\frac{a}{n+1}a_n$两边取极限得$A=0$。

或

取$n_0>a$，当$n>n_0$时

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a^{n_0}}{n_0!}\frac{a}{n_0+1}\frac{a}{n_0+2}\cdots\frac{a}{n}<\frac{a^{n_0}}{n_0!}\frac{a}{n}\to 0$$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{a^n}=0(a>1,\alpha>0)$ ［习题 2.1：推广］

令$a=1+\lambda(\lambda>0)$，取正整数$m:\alpha<m-1$

$$a^n = (1+\lambda)^n > \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\lambda^m$$

$$\frac{n^\alpha}{a^n} < \frac{n^{m-1}}{a^n} < \frac{m!}{\lambda^m}\frac{n^{m-1}}{n(n-1)\cdots(n-m+1)} = \frac{m!}{\lambda^m}\frac{1}{(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{m-1}{n})}\frac{1}{n} \to 0$$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[\log_a n]^\beta}{n^\alpha} = 0(a>1, \beta>0, \alpha>0)$［第二章总练习题：2（2）］

只证$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n} = 0$（其他以后再证）。

$\forall\varepsilon>0$，则$10^\varepsilon > 1$，再由$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$得，存在$N$，当$n>N$时，有

$1 < \sqrt[n]{n} < 10^\varepsilon$，两边取对数得$0 < \frac{\lg n}{n} < \varepsilon$，说明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n} = 0$。