第八讲

函数的一致连续性

· 函数连续的柯西准则

函数 f 在区间 I 上连续 $\Longleftrightarrow$

$\forall x_0 \in I$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, 使得

$\forall x_1, x_2 \in U(x_0, \delta)$, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

· 一致连续的概念

函数 f 在区间 I上一致连续是指:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall x_1, x_2 \in I$,

只要 $|x_1 - x_2| < \delta$, 就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

· 非一致连续

函数 f 在区间 I 上非一致连续 $\Longleftrightarrow$

$\exists \varepsilon_0 > 0$，对于 $\forall \delta > 0$，$\exists x_1, x_2 \in I$，

虽然 $|x_1 - x_2| < \delta$，但是 $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon_0$.

例如 课堂上我们学习了函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$

在区间 $(0,1)$ 上连续，但是非一致连续.

例 1. 设函数 f 在区间 I 上满足利普希兹条件, 即由存在常数 $L>0$ ，使得 $\forall x_1, x_2 \in I$，有

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le L|x_1-x_2|$$

证明 f 在 I 上一致连续.

证明 对任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{L+1}$ ，$\forall x_1, x_2 \in I$,

由利普希兹条件，可得

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le L|x_1-x_2| \le L\frac{\varepsilon}{L+1} < \varepsilon.$$

因此 f 在 I 上一致连续.

例 2. 求证函数 $f(x)=\sin^3 x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证明

由于 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,

$$f(x_1)-f(x_2)=\sin^3 x_1-\sin^3 x_2$$

$$=(\sin x_1-\sin x_2)\cdot(\sin^2 x_1+\sin x_1\cdot\sin x_2+\sin^2 x_2)$$

所以

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le 3|\sin x_1-\sin x_2|$$

$$=3\times 2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|$$

$$\le 6\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\le 6\left|\frac{x_1-x_2}{2}\right|\le 3|x_1-x_2|$$

因此 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足利普希兹条件,

故 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

例 3. 求证 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非一致连续.

分析 即证 $\exists\varepsilon_0>0$, 对于 $\forall\delta>0$,

$\exists x_1, x_2\in(-\infty,+\infty)$, $|x_1-x_2|<\delta$, $|x_1^2-x_2^2|\ge\varepsilon_0$.

注意到 $|x_1^2-x_2^2|=|x_1-x_2|\cdot|x_1+x_2|$

分别令 $x_1-x_2=\dfrac{\delta}{2}$, $x_1+x_2=\dfrac{2}{\delta}$,

即可.

证明 取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$, 对于 $\forall \delta > 0$,

分别令 $x_1 = \dfrac{1}{\delta} + \dfrac{\delta}{4}$, $x_2 = \dfrac{1}{\delta} - \dfrac{\delta}{4} \in (-\infty, +\infty)$,

则 $|x_1 - x_2| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$,

$$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2|$$

$$= \frac{\delta}{2} \cdot \frac{2}{\delta} = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

因此 $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上非一致连续.

· 一致连续性定理 (康托定理)

若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.

例如 函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，

因此在每个闭区间 $[a,b]$ 上一致连续.

但是 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非一致连续.

例 4. 若函数 f 在开区间 (a,b)上连续,

求证：f 在 (a,b) 上一致连续的充要条件是

$$f(a+0), f(b-0) \text{ 均存在.}$$

证明 (充分性) 设 $f(a+0), f(b-0)$ 均存在.

令

$$F(x)=\begin{cases} f(a+0), & x=a, \\ f(x), & x\in(a,b), \\ f(b-0), & x=b \end{cases}$$

则 F 在 $[a,b]$上连续.

由一致连续性定理，F 在 $[a,b]$上一致连续.

故 f 在 (a,b)上一致连续.

(必要性) 设 f 在 (a,b)上一致连续. 由定义，

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x_1, x_2\in(a,b),$

只要 $|x_1-x_2|<\delta,$ 就有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$

特别地, $\forall x_1, x_2\in(a,a+\delta),$ 有 $|x_1-x_2|<\delta,$

因此，$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$

由极限存在的柯西准则，$f(a+0)$ 存在.

类似地，$f(b-0)$ 存在.

注1. 本题给出了有限开区间上函数是否一致连续的方法. 例如已经证明的 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上非一致连续.

注2. 本题结论对无限区间不成立.

例如前面证明 $f(x)=\sin^3 x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续. 但是 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sin^3 x$ 均不存在.

注3. 进一步本题还说明,

若 f 在 (a,b) 上一致连续, 则 f 必有界,

且可以取到 $f(a+0), f(b-0)$ 之间的一切值.

例 5. 若函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 求证：f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证明 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$，

$\exists M>\max\{a,0\}$，$\forall x>M$，$|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

于是对 $\forall x_1, x_2\in(M,+\infty)$，

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)-A|+|f(x_2)-A|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

又因为 f 在 $[a, M+1]$ 上连续，由一致连续性定理，

f 在 $[a, M+1]$ 上一致连续. 于是 $\exists \delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$,

对 $\forall x_1, x_2 \in [a, M+1]$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$,

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

综上，对 $\forall x_1, x_2 \in [a, +\infty)$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$,

下列两种情况之一必发生，

情况一 $x_1, x_2 \in [a, M+1]$;

情况二 $x_1, x_2 \in (M,+\infty)$.

无论哪种情况发生，均有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

故 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

思考 证明过程中若将区间 $[a,+\infty)$ 分成 $(M,+\infty)$ 和 $[a, M]$，会有何影响？

· 一致连续的一个充要条件

课堂上已证一致连续的一个常用的充要条件.

函数 f 在区间 I 上一致连续 $\Longleftrightarrow$

$\forall \{x_n\}, \{y_n\} \subset I$, 只要 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$,

就有 $\lim\limits_{n\to\infty}\big(f(x_n) - f(y_n)\big) = 0.$

例 6. 求证 $f(x)=\sin(x^2)$ 在 $\mathbb{R}$ 上非一致连续.

证明 分别取

$$x_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\,,\qquad y_n=\sqrt{2n\pi}\,,\qquad n=1,2,\ldots$$

则 $$x_n-y_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}-\sqrt{2n\pi}$$

$$=\frac{\pi/2}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}+\sqrt{2n\pi}}\to 0,\quad (n\to\infty).$$

而

$$f(x_n)=\sin(x_n^2)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1.$$

$$f(y_n)=\sin(y_n^2)=\sin(2n\pi)=0.$$

所以

$$f(x_n)-f(y_n)\to 1\neq 0.\qquad (n\to\infty).$$

由一致连续性的充要条件，$\sin(x^2)$ 在 $\mathbb{R}$ 上非一致连续.

例 7. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数，且连续，求证：f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证明 设 $T(>0)$ 是 f 的一个周期.

由于 f 在 $[0,2T]$ 上连续，由一致连续性定理，

f 在 $[0,2T]$ 上一致连续. $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,$

$\forall x_1, x_2\in[0,2T],$ 只要 $|x_1-x_2|<\delta,$ 就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

对 $\forall x', x'' \in \mathbb{R}$， 当 $|x'-x''|<\delta$,

不妨 $x' \le x''$，记 $x''-x'=\eta$，则 $0<\eta<\delta$.

由于 x' 可表示成

$$x'=nT+r,$$

其中 $n \in \mathbb{Z}$, $0 \le r < T$.

则 $x''=x'+\eta \quad =nT+r+\eta,$

且 $0 \le r+\eta < 2T$.

由 f 的周期性及前面讨论,

$$|f(x')-f(x'')|=|f(nT+r)-f(nT+r+\eta)|$$

$$=|f(r)-f(r+\eta)|<\varepsilon.$$

故 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

注1. 由本题 $\sin x, \cos x$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

注2. 由例6. $\sin(x^2)$ 在 $\mathbb{R}$ 上非一致连续,

再由本题说明, $\sin(x^2)$ 不是周期函数.