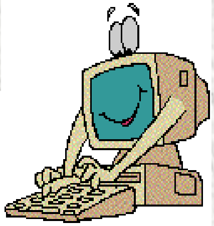
研究函数插值的必要性



实际问题中遇到的函数一般具有确定的函数关系，但其解析表达式可能:

（1）未知，但可以测得一些关键点处的函数值。

（2）已知，但表达式复杂不实用，常常需用一个简单的解析表达式来近似代替它。

具体要求

（1）在某个范围内能和原函数充分接近，有较好的近似效果。

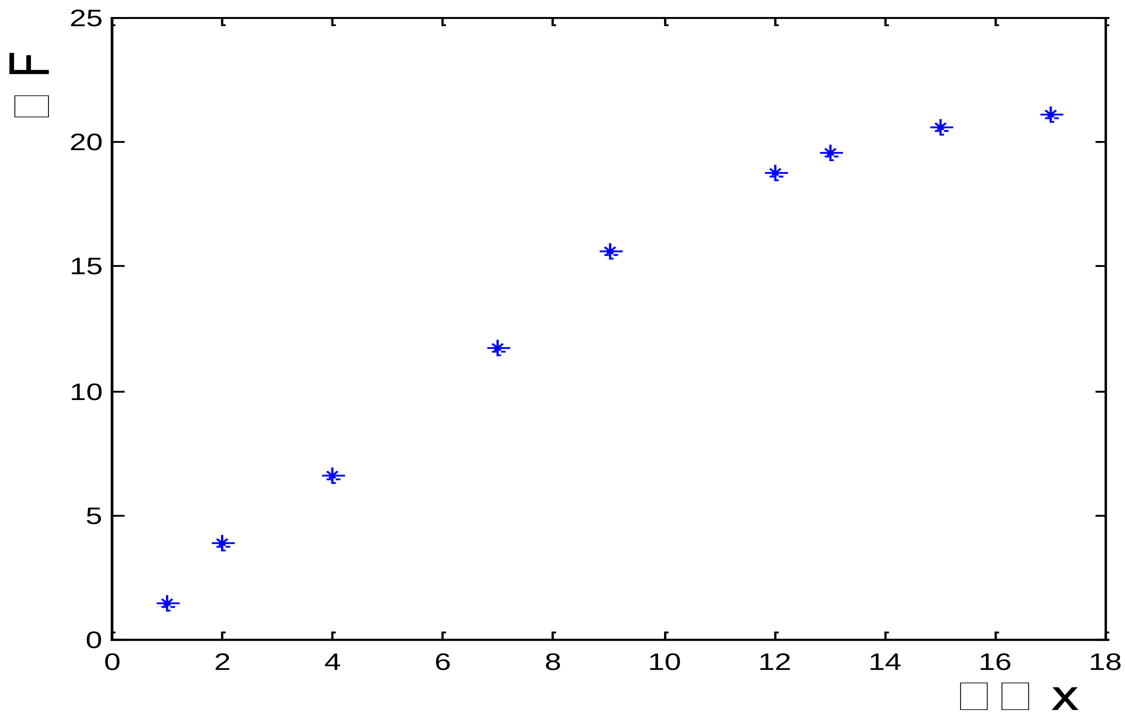
（2）具有一定的光滑性。

（3）表达式简单易用，比如：多项式，有理分式，三角函数中的正弦与余弦函数等等。

举例： Hooker定律

弹簧在力F的作用下伸长x,一定范围内服从Hooker定律:
$F = kx$, k为弹性系数,现在得到下面一组数据,通过作图.
可以看出，当F达到一定数值后,就不服从Hooker定律.
试由数据确定k,并给出不服从Hooker定律时的近似公式.

$x(cm)$	1	2	4	7	9	12	13	15	17
$F(kg)$	1.5	3.9	6.6	11.7	15.6	18.8	19.6	20.6	21.1



§1　多项式插值

问题

假如通过实验或测量可以获得$f(x)$在区间$[a,b]$上的一组$n+1$个不同的点：

$$a \le x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le b$$

对应的函数值：

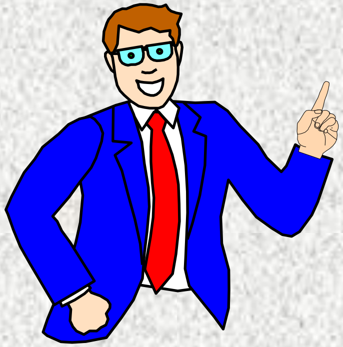
$$y_i = f(x_i) \quad i = 0,1,2,\cdots,n。$$

要求一个次数不超过n次的多项式$P_n(x)$，满足：

$$p_n(x_i) = y_i = f(x_i), i = 0,1,2,\ldots\ldots,n$$

目的

实际计算中，用$P_n(x)$近似代替$f(x)$。



插值条件

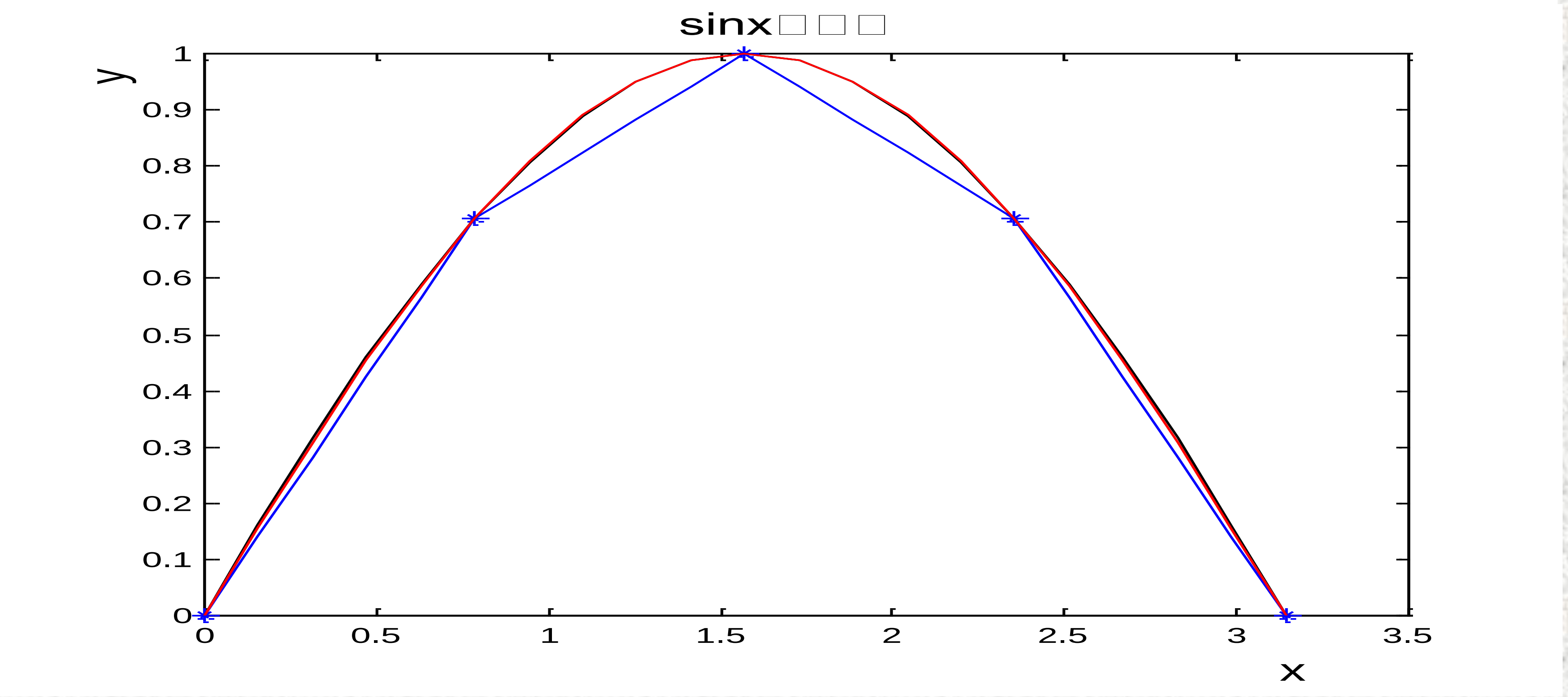
插值多项式

插值节点

插值区间

一个例子

如$y=\sin x$,若给定$[0,\pi]$上5个等分点，其插值函数图象为：



易见，对于被插函数$f(x)$和插值函数$P(x)$:

1） 在插值节点x_i处：$P(x_i)=f(x_i)\left(or.\text{没有误差}\right)$;

2） 插值节点x_i以外点：$P(x)\neq f(x)\left(or.P(x)\approx f(x),\text{存在误差}\right)$;

❐ 存在唯一性

满足插值条件的多项式是存在唯一的。

证明　设$y=f(x)$ 的插值多项式为：

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

则有：$P_n(x_i)=y_i \qquad i=0,1,2,\cdots,n$

即$P_n(x)$的系数$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$满足方程组：

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n=y_0 \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n=y_1 \\ \cdots\cdots \\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n=y_n \end{cases}$$

$\because$方程组的系数矩阵行列式

$$V=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=\prod_{i=0}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n}(x_j-x_i)\overset{x_i\neq x_j}{\neq}0$$

$\therefore a_0,a_1,\cdots,a_n$存在且唯一

即：$P_n(x)$存在且唯一。

例1　求满足下面插值条件的二次插值多项式。

x	0	1	3
y	1	3	2

解　设 $P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$，则

$$\begin{cases} a_0=1 \\ a_0+a_1+a_2=3 \\ a_0+3a_1+9a_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1+a_2=2 \\ 3a_1+9a_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=1 \\ a_1=17/6 \\ a_2=-5/6 \end{cases}$$

$$\therefore P_2(x)=1+\frac{17}{6}x-\frac{5}{6}x^2$$

这种方法称为待定系数法！

❐ 插值余项(截断误差)

假设在区间$[a,b]$上$f(x)$的插值多项式为$P_n(x)$

令 $$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$$

显然在插值节点 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$上

$$R_n(x_i)=f(x_i)-P_n(x_i)=0\ ,\quad i=0,1,\cdots,n$$

因此$R_n(x)$在$[a,b]$上至少有$n+1$个零点

因此可设 $$R_n(x)=K(x)\omega_{n+1}(x)$$

其中 $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, $K(x)$为待定函数

所以 $$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=K(x)\omega_{n+1}(x)$$

即 $$f(x)-P_n(x)-K(x)\omega_{n+1}(x)=0$$

注意t与x的区分

引入辅助函数：$\varphi(t)=f(t)-P_n(t)-K(x)\omega_{n+1}(t)$

则有 $\varphi(x)=f(x)-P_n(x)-K(x)\omega_{n+1}(x)=0$

且 $\varphi(x_i)=f(x_i)-P_n(x_i)-K(x)\omega_{n+1}(x_i)$

$$=R_n(x_i)-K(x)\omega_{n+1}(x_i)=0 \quad i=0,1,\cdots,n$$

因此,若令$x\neq x_i$,$\varphi(t)$在区间$[a,b]$上至少有$n+2$个零点,即

$$\varphi(x)=0\,,\quad \varphi(x_i)=0\quad,\ i=0,1,2,\cdots,n$$

由于$P_n(x)$和$\omega_{n+1}(x)$为多项式,因此若$f(x)$可微,则$\varphi(t)$也可微

由Rolle中值定理 $\varphi'(t)$在区间(a,b)上有至少$n+1$个零点

再由Rolle中值定理 $\varphi''(t)$在区间(a,b)上有至少n个零点

依次类推

$$\boxed{\varphi(t)=f(t)-P_n(t)-K(x)\omega_{n+1}(t)}$$

在区间(a,b)内至少有一个点ξ,使得$\varphi(t)$的$n+1$阶导数为零

$$\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$$

由于 $\varphi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-P_n^{(n+1)}(t)-K(x)\omega_{n+1}^{(n+1)}(t)$

因此 $\varphi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-P_n^{(n+1)}(\xi)-K(x)\omega_{n+1}^{(n+1)}(\xi)$

$$=f^{(n+1)}(\xi)-K(x)\cdot(n+1)!=0$$

所以 $K(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

所以 $R_n(x)=K(x)\omega_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

定理2【P63】

设$f(x)$在区间$[a,b]$上$n+1$阶可微，$P_n(x)$为$f(x)$在$[a,b]$上的n次插值多项式，插值节点为$\{x_i\}_{i=0}^n \subset [a,b]$，则$\forall x \in [a,b]$，有

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中 $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$， $\xi \in (a,b)$，且依赖于x.

Lagrange插值多项式

一个特例

已知$n+1$个不同的插值节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$，求满足如下要求的插值多项式$l_0(x)$。

$$\begin{cases} l_0(x_0)=1 \\ l_0(x_j)=0 \quad j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

解　$\because$ $l_0(x)$是多项式，且$x_1, x_2, \cdots, x_n$是其根

$\therefore$ 可设　$l_0(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

又$\because l_0(x_0)=1$，　$\therefore a=\dfrac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$

$$\therefore l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}=\prod_{j=1}^{n}\frac{x-x_j}{x_0-x_j}$$

推广

满足插值条件$\begin{cases} l_i(x_j)=1 & j=i \\ l_i(x_j)=0 & j=0,1,2,\cdots,n,\ \ j\neq i \end{cases}$的插值多项式$l_i(x)$为

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

Lagrange插值公式

已知$a\le x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n\le b$及 $y_i=f(x_i)\quad i=0,1,2,\cdots,n$。则满足插值条件：

$$p_n(x_i)=y_i, i=0,1,2,\ldots\ldots,n$$

的次数不超过n次的多项式$P_n(x)$为：

$$P_n(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+\cdots+y_nl_n(x)$$

其中：$l_i(x)=\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\dfrac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\quad (i=0,1,\cdots,n)$

常用的低阶插值公式

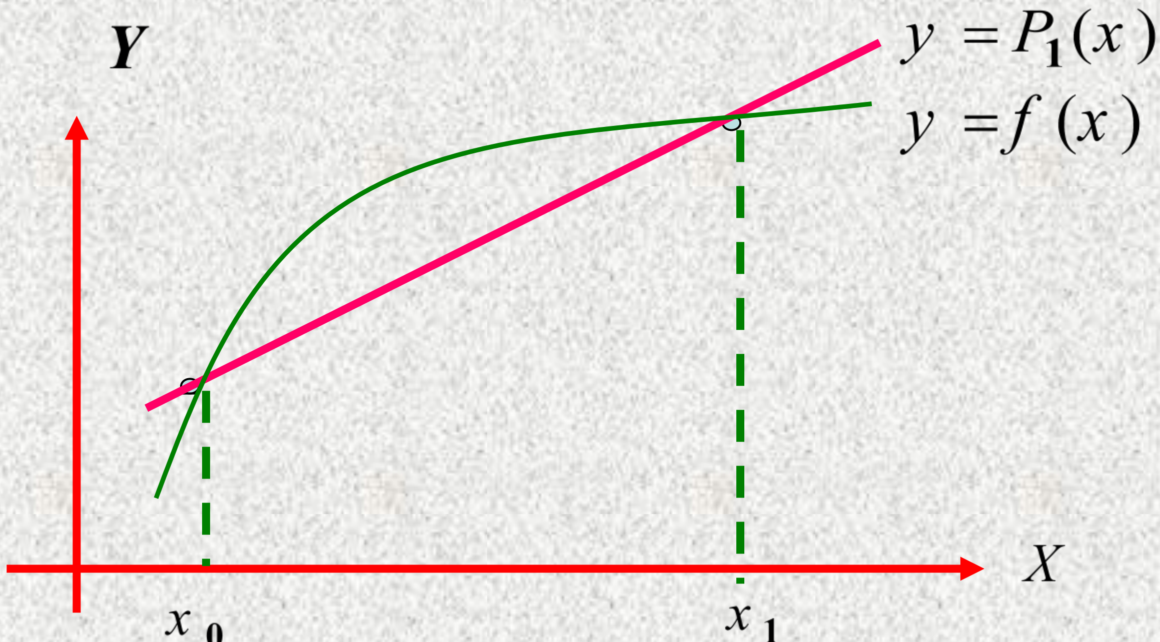
I. 线性插值

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

$$\because l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\quad l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$\therefore P_1(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

几何意义:



II. 抛物插值

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$\therefore P_2(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)$$

例1 已知$f(x)$满足$f(144)=12,\ f(169)=13,\ f(225)=15$

作$f(x)$的二次Lagrange插值多项式,并求$f(175)$的近似值.

解

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-169)(x-225)}{2025}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-144)(x-225)}{-1400}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-144)(x-169)}{4536}$$

因此$f(x)$的二次Lagrange插值多项式为

$$P_2(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)$$

且 $f(175)\approx P_2(175)$

$$=12l_0(175)+13l_1(175)+15l_2(175)$$

$$=13.230\,158\,73$$

例2 用Lagrange线性插值多项式求例1中的$f(175)$.

解 由于插值点$x=175$在$x_1=169$与$x_2=225$之间

因此取$x_1=169$与$x_2=225$为插值节点

Lagrange插值基函数为

$$l_1(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{x-225}{-56} \qquad l_2(x)=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{x-169}{56}$$

∴ Lagrange线性插值多项式为

$$P_1(x)=y_1l_1(x)+y_2l_2(x)=13\cdot\frac{x-225}{-56}+15\cdot\frac{x-169}{56}$$

$$\therefore\ f(175)\approx 13\cdot\frac{175-225}{-56}+15\cdot\frac{175-169}{56}=13.214\,285\,71$$

例3 若$f(x)=\sqrt{x}$,三个插值节点为144,169,225,

试估计用Lagrange线性和二次插值做$f(175)$近似值的截断误差.

解 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad f''(x)=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ $\quad f'''(x)=\dfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$

$$R_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-169)(x-225)$$

$$R_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-144)(x-169)(x-225)$$

$$\therefore |R_1(175)|=\left|\frac{f''(\xi)}{2}(175-169)(175-225)\right|=\frac{300}{2}\left|f''(\xi)\right|=150\left|f''(\xi)\right|$$

$$\left|f''(\xi)\right|=\frac{1}{4}\xi^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{4\xi\sqrt{\xi}}\le\frac{1}{4*169*13}$$

$$|R_1(175)|\le\frac{150}{4*169*13}=0.01706873008648$$

$$|R_2(175)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{6}(175-144)(175-169)(175-225)\right|$$

$$= \frac{9300}{2}\left|f'''(\xi)\right| = 4650\left|f'''(\xi)\right|$$

$$\left|f'''(\xi)\right| = \frac{3}{8}\xi^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8\xi^2\sqrt{\xi}} \le \frac{3}{8*144^2*12}$$

$$\therefore |R_2(175)| \le \frac{4650*3}{8*144^2*12} = 0.00700774016204$$

注：利用matlab的函数sqrt(175)，得

```
>> format long
>> sqrt(175)
ans =  13.22875655532295
```

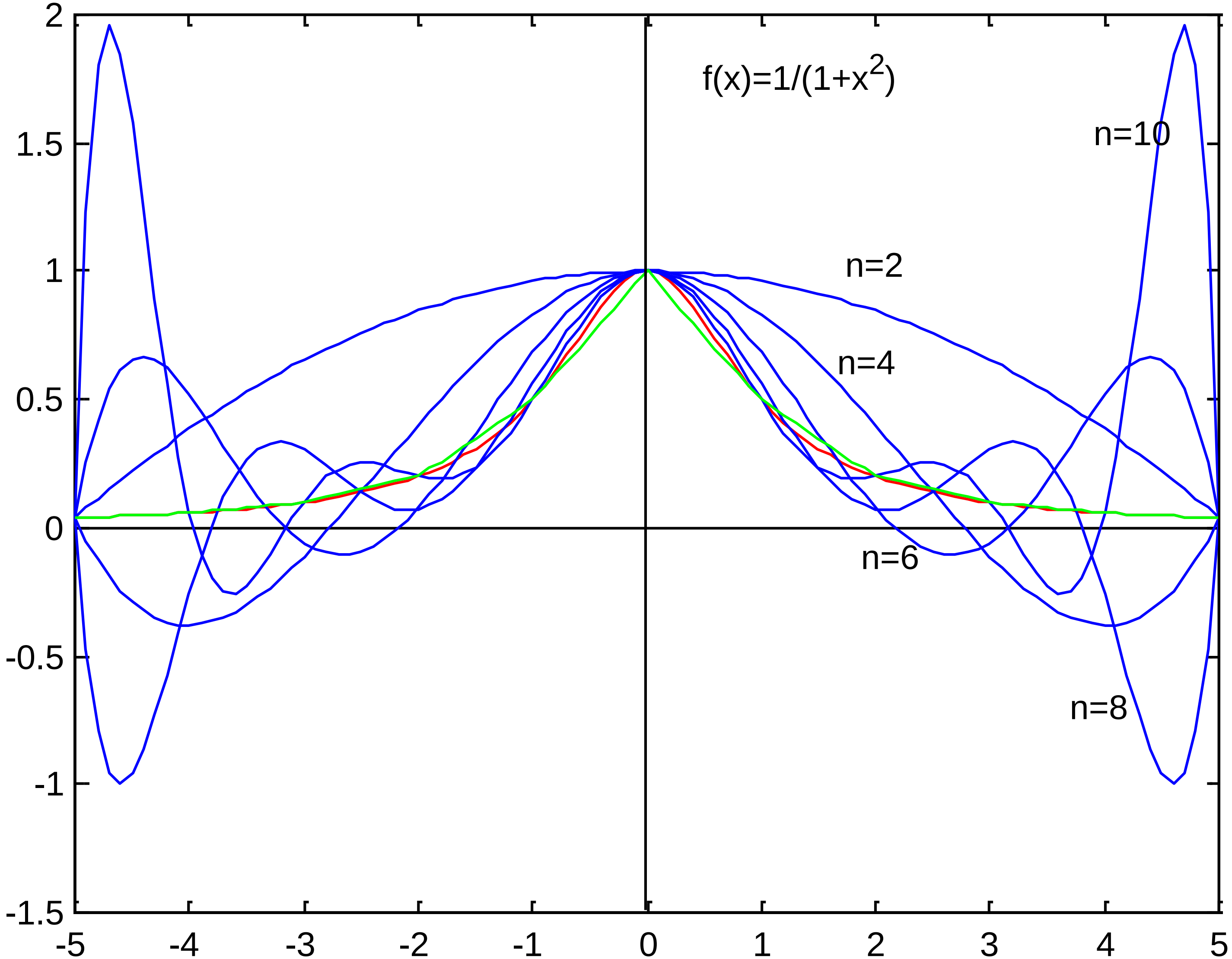
➢ Lagrange插值的Matlab程序

```
%lagrangen.m
function y=lagrangen(x0,y0,x)
n=length(x0);m=length(x);
for i=1:m
   z=x(i);s=0;
   for k=1:n
      L=1;
      for j=1:n
         if j~=k
            L=L*(z-x0(j))/(x0(k)-x0(j));
         end
      end
      s=s+L*y0(k);
   end
   y(i)=s;
end
y;
```

➢ 插值多项式次数对插值的影响

```
%Chazhibijiao.m
x=-5:0.1:5;z=0*x;y=1./(1+x.^2);
plot(x,z,'k',x,y,'r')
axis([-5 5 -1.5 2]);pause,hold on
for n=2:2:10
   x0=linspace(-5,5,n+1);
   y0=1./(1+x0.^2);
   x=-5:0.1:5; y1=lagrangen(x0,y0,x);
   plot(x,y1), pause
end
y2=1./(1+x0.^2);y=interp1(x0,y2,x);
plot (x,y,'k'),hold off
gtext('n=2'),gtext('n=4'),gtext('n=6')
gtext('n=8'),gtext('n=10')
gtext('f(x)=1/(1+x^2)')
```

不同次数的Lagrange插值多项式的比较图



Runge现象

➢ Lagrange插值的不足之处

（1）插值基函数虽然是n次多项式，
但函数值无法用秦九韶算法快速计算。

（2）当插值节点较多时，要用高次多项式插值
但高次插值未必有高精度。

（3）当插值节点增加时，先前计算的插值无法继续
使用，必须重新计算。

Newton插值多项式

基本思想

1. 当$n=0$时，$P_0(x_0)=y_0$

2. 假设$n=k-1$时，次数$\le k-1$的多项式$P_{k-1}(x)$满足：

$$P_{k-1}(x_i)=y_i,(0\le i\le k-1)$$

则构造 $P_k(x)=P_{k-1}(x)+c_k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})$

因为 $P_k(x_i)=P_{k-1}(x_i)=y_i,(0\le i\le k-1)$

所以，由 $P_k(x_k)=y_k$

解得 $$c_k=\frac{y_k-P_{k-1}(x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})}$$

如，已知

x	5	-7	-6	0
y	2	-23	-54	-954

易得 $P_3(x)=2+2(x-5)+3(x-5)(x+7)+4(x-5)(x+7)(x+6)$

求法

令 $q_0(x)=1$ $q_1(x)=x-x_0$

$$q_2(x)=(x-x_0)(x-x_1)$$

$$q_3(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$q_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

则 $$P_n(x)=\sum_{j=0}^{n}c_jq_j(x)$$

若记 $$c_n=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$$

则 $$c_0=f[x_0]=f(x_0)$$

$$c_1=f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$c_n=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f[x_1,\cdots,x_n]-f[x_0,\cdots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

如$n=3$时，$p_3(x)=c_0q_0(x)+c_1q_1(x)+c_2q_2(x)+c_3q_3(x)$

其中：$q_0(x)=1$ $\quad q_1(x)=x-x_0$

$q_2(x)=(x-x_0)(x-x_1)$ $\quad q_3(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

分别令：$x=x_0,x_1,x_2,x_3$，得：

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & (x_1-x_0) & & \\ 1 & (x_2-x_0) & (x_2-x_0)(x_2-x_1) & \\ 1 & (x_3-x_0) & (x_3-x_0)(x_3-x_1) & (x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{bmatrix}$$

可解得：$c_0=f[x_0]=f(x_0)$ $\quad c_1=f[x_0,x_1]=\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$

$$c_2=\frac{\dfrac{f_2-f_0}{x_2-x_0}-\dfrac{f_1-f_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}$$

$c_3=$很复杂！

$\boxed{\text{证明}}$ 令$p_k(x)$是$f(x)$在$x_0, x_1, \cdots, x_k$上次数$\le k$次的插值多项式，

即满足： $p_k(x_i) = f(x_i)(i = 0, 1, \cdots, k)$

$q(x)$是$f(x)$在$x_1, \cdots, x_n$上次数$\le n-1$次的插值多项式，

即满足： $q(x_i) = f(x_i)(i = 1, \cdots, n)$

则$f(x)$在$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$上的次数$\le n$的插值多项式为

$$p_n(x) = q(x) + \frac{x - x_n}{x_n - x_0}[q(x) - p_{n-1}(x)]$$

$$p_n(x)=q(x)+\frac{x-x_n}{x_n-x_0}[q(x)-p_{n-1}(x)]$$
$$p_k(x_i)=f(x_i)(i=0,1,\cdots,k)$$
$$q(x_i)=f(x_i)(i=1,\cdots,n)$$

这是因为:

1）$p_n(x)$是次数$\le n$的多项式;

2）验证:$p_n(x_i)=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$

$$p_n(x_0)=q(x_0)+\frac{x_0-x_n}{x_n-x_0}[q(x_0)-p_{n-1}(x_0)]=p_{n-1}(x_0)=f(x_0)$$

$$p_n(x_1)=q(x_1)+\frac{x_1-x_n}{x_n-x_0}[q(x_1)-p_{n-1}(x_1)]=q(x_1)=f(x_1)$$

....

$$p_n(x_n)=q(x_n)+\frac{x_n-x_n}{x_n-x_0}[q(x_n)-p_{n-1}(x_n)]=q(x_n)=f(x_n)$$

而 $p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f[x_0,x_1,\cdots,x_k]\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)$

$p_n(x)$中x^n的系数为：$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$

$$q(x)=\sum_{k=1}^{n} f[x_1,x_2,\cdots,x_k]\prod_{j=1}^{k-1}(x-x_j)$$

$$p_{n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n-1} f[x_0,x_1,\cdots,x_k]\prod_{j=1}^{k-1}(x-x_j)$$

右端中x^n的系数为：$\dfrac{1}{x_n-x_0}\Big(f[x_1,x_2,\cdots,x_n]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]\Big)$

根据两端x^n的系数相同，得

$$c_n=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f[x_1,\cdots,x_n]-f[x_0,\cdots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

均差

x_0	$f(x_0)$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	三阶差商
x_2	$f(x_2)$	$f[x_2,x_3]$	二阶差商	
x_3	$f(x_3)$	一阶差商		

c_i

$$f[x_0]=f(x_0)$$

$$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

$$c_n=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f[x_1,\cdots,x_n]-f[x_0,\cdots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$ n阶差商

例 已知函数值

x	3	1	5	6
$f(x)$	1	–3	2	4

，求$f(x)$的插值多项式.

解

3	1	2	–3/8	7/40
1	–3	5/4	3/20	
5	2	2		
6	4			

所以

$$p(x)=1+2(x-3)-\frac{3}{8}(x-3)(x-1)+\frac{7}{40}(x-3)(x-1)(x-5)$$

均差性质

1 牛顿插值误差理

设$p(x)$是$f(x)$在$n+1$个不同节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$上次数$\le n$的插值多项式，若$t \ne x_1, x_2, \cdots, x_n$，则

$$f(t) - p(t) = f[x_0, x_1, \cdots, x_n, t]\prod_{j=0}^{n}(t - x_j)$$

证明

设$q(x)$是$f(x)$在节点$x_0, x_1, \cdots, x_n, t$上的次数$\le n+1$的插值多项式，

则
$$q(x) = p(x) + f[x_0, x_1, \cdots, x_n, t]\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

$\because t$是$q(x)$的插值节点，

$\therefore q(t) = f(t)$

即
$$f(t) - p(t) = f[x_0, x_1, \cdots, x_n, t]\prod_{j=0}^{n}(t - x_j)$$

2 导数与均差定理

设$f(x)$是$[a,b]$上n次连续可微函数，且$x_0,x_1,\cdots,x_n$是$[a,b]$中互异节点，则$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

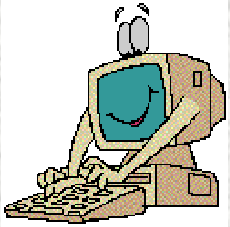
证明　由插值余项定理

$$f(x_n)-p(x_n)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)\prod_{j=0}^{n-1}(x_n-x_j)$$

而
$$f(x_n)-p(x_n)=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]\prod_{j=0}^{n-1}(x_n-x_j)$$

比较即得结论.

☐ Hermite插值问题



如果在插值数据中提供了被插函数的导数信息，则插值函数也要体现这些信息。

设$f(x)$在节点 $a \le x_0, x_1, \cdots, x_n \le b$处的函数值为$y_0, y_1, \cdots, y_n$

并且在插值节点处有一阶导数 $f'(x_i) = y_i' \quad i = 0,1,2,\ldots,n$

求一个次数不超过$2n+1$次的多项式$\mathrm{H}(x)$:

$$H(x_i) = f(x_i) = y_i \;, \qquad i = 0,1,\cdots,n$$

$$H'(x_i) = f'(x_i) = y_i' \;, \qquad i = 0,1,\cdots,n$$

这种带有导数的多项式插值问题，称为Hermite插值问题。

➤ 两点三次Hermite插值

1 问题： 已知被插值函数$f(x)$满足插值条件：

x	x_0	x_1
$f(x)$	y_0	y_1
$f'(x)$	y_0'	y_1'

即： $f(x_0)=y_0$， $f(x_1)=y_1$， $f'(x_0)=y_0'$， $f'(x_1)=y_1'$

要求一个三次插值多项式$H_3(x)$，满足

$$H_3(x_0)=y_0 \qquad H_3(x_1)=y_1$$

$$H_3'(x_0)=y_0' \qquad H_3'(x_1)=y_1'$$

2 四个特例

1）求三次插值多项式$\alpha_0(x)$，满足：

x	x_0	x_1
$\alpha_0(x)$	1	0
$\alpha_0'(x)$	0	0

解 $\because x_1$是$\alpha_0(x)$的二重零点,

$\therefore$ 可设 $\alpha_0(x)=(x-x_1)^2(ax+b)$

由$\alpha_0(x_0)=1$, $\alpha_0'(x_0)=0$, 可得

$$a=-\frac{2}{(x_0-x_1)^3},\quad b=\frac{1}{(x_0-x_1)^2}+\frac{2x_0}{(x_0-x_1)^3}$$

$$\therefore \alpha_0(x)=(x-x_1)^2(ax+b)$$

$$=(x-x_1)^2\left(-\frac{2x}{(x_0-x_1)^3}+\frac{1}{(x_0-x_1)^2}+\frac{2x_0}{(x_0-x_1)^3}\right)$$

$$=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

即$\alpha_0(x)$:

x	x_0	x_1
$\alpha_0(x)$	1	0
$\alpha_0'(x)$	0	0

$$\boxed{\alpha_0(x)=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2}$$

2）求三次插值多项式$\alpha_1(x)$，满足：

x	x_0	x_1
$\alpha_1(x)$	0	1
$\alpha_1'(x)$	0	0

由对称性，知

$$\boxed{\alpha_1(x)=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2}$$

3）求$\beta_0(x)$，满足：

x	x_0	x_1
$\beta_0(x)$	0	0
$\beta_0'(x)$	1	0

解 $\because x_0$、x_1分别是$\beta_0(x)$的单根和二重根

$\therefore$ 可设 $\beta_0(x) = a(x-x_0)(x-x_1)^2$

由$\beta_0'(x_0)=1$，得 $a = \dfrac{1}{(x_0-x_1)^2}$，

$$\therefore \beta_0(x) = \frac{1}{(x_0-x_1)^2}(x-x_0)(x-x_1)^2$$

$$= (x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

4）同理$\beta_1(x)$：

x	x_0	x_1
$\beta_1(x)$	0	0
$\beta_1'(x)$	0	1

$$\beta_1(x) = (x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

x	x_0	x_1
$\alpha_0(x)$	1	0
$\alpha_0'(x)$	0	0

$$\alpha_0(x)=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

x	x_0	x_1
$\alpha_1(x)$	0	1
$\alpha_1'(x)$	0	0

$$\alpha_1(x)=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

Hermite插值基函数！

x	x_0	x_1
$\beta_0(x)$	0	0
$\beta_0'(x)$	1	0

$$\beta_0(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

x	x_0	x_1
$\beta_1(x)$	0	0
$\beta_1'(x)$	0	1

$$\beta_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

验证满足插值条件

3 要求的三次Hermite插值多项式为:

$$H_3(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+y_0'\beta_0(x)+y_1'\beta_1(x)$$

$$=\cdots(\text{代入})$$

4 标准化的三次Hermite插值基函数

记$\varphi_0(x)=(1+2x)(1-x)^2$，$\varphi_1(x)=x(1-x)^2$则

$$\alpha_0(x)=\varphi_0\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)=\varphi_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right)$$

$$\alpha_1(x)=\varphi_0\left(\frac{x_1-x}{x_1-x_0}\right)=\varphi_0\left(\frac{x_1-x}{h}\right)$$

$$\beta_0(x)=(x_1-x_0)\varphi_1\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)=h\varphi_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right)$$

$$\beta_1(x)=-(x_1-x_0)\varphi_1\left(\frac{x_1-x}{x_1-x_0}\right)=-h\varphi_1\left(\frac{x_1-x}{h}\right)$$

$$\therefore H_3(x)=y_0\varphi_0\left(\tfrac{x-x_0}{h}\right)+y_1\varphi_0\left(\tfrac{x_1-x}{h}\right)+y_0'h\varphi_1\left(\tfrac{x-x_0}{h}\right)-hy_1'\varphi_1\left(\tfrac{x_1-x}{h}\right)$$

便于在计算机上编程实现

其中$h=x_1-x_0$.

5 存在性与唯一性

定理 如果节点不同，则三次Hermite插值多项式存在且唯一。

证明　存在性显然。

设三次多项式$p(x)$也满足插值条件，令：

$$q(x)=H_3(x)-p(x)$$

则x_0,x_1都是其二重根，所以

$$q(x)=a(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$

但$q(x)$的次数最多只能为三次，从而$a=0$。

$$\therefore \quad q(x)=H_3(x)-p(x)=0$$

5 插值余项

设两点三次Hermite插值的误差函数为：

$$R_3(x)=f(x)-H_3(x)$$

则对$i=0,1$有：

$$R_3(x_i)=f(x_i)-H_3(x_i)=0$$

$$R_3'(x_i)=f'(x_i)-H_3'(x_i)=0$$

即：x_0,x_1均为$R_3(x)$的二重零点，因此可设

$$R_3(x)=K(x)(x-x_0)^2(x-x_1)^2，\text{其中}K(x)\text{待定}$$

构造辅助函数：$\varphi(t)=f(t)-H_3(t)-K(x)(t-x_0)^2(t-x_1)^2$

则有：

$$\varphi(x_i)=f(x_i)-H_3(x_i)-K(x)(x_i-x_0)^2(x_i-x_1)^2=0,i=0,1$$

以及：

$$\varphi(x)=f(x)-H_3(x)-K(x)(x-x_0)^2(x-x_1)^2=0$$

因此，$\varphi(t)$至少有5个零点，连续使用4次Rolle定理，可得：

$$\text{至少}\exists\xi\in[x_0,x_1]，\text{使得}\varphi^{(4)}(\xi)=0$$

而$\varphi^{(4)}(\xi)=f^{(4)}(\xi)-4!K(x)=0$ $\qquad\therefore K(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$

所以插值余项为：

$$\boxed{R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2,x_0\le\xi\le x_1}$$

例1　已知函数$y=f(x)$数据表：

x	1	2
y	2	0
y'	3	-1

求$f(x)$的三次Hermite插值多项式，并求$f(1.5)$和$f(1.7)$的近似值。

解　$x_0=1, x_1=2$　　$y_0=2, y_1=3$　　$y_0'=0, y_1'=-1$

$$\therefore H_3(x)=y_0\varphi_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right)+y_1\varphi_0\left(\frac{x_1-x}{h}\right)+m_0h\varphi_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right)-hm_1\varphi_1\left(\frac{x_1-x}{h}\right)$$

$$=2\varphi_0(x-1)+3\varphi_0(2-x)+\varphi_1(2-x)$$

$$=-3x^3+13x^2-17x+9$$

$$f(1.5)\approx H_3(1.5)=2.625,\quad f(1.7)\approx H_3(1.7)=2.931$$

§4.5 三次样条插值

样条由来

许多工程技术中提出的计算问题对插值函数的光滑性有较高要求，如飞机的机翼外形，内燃机的进、排气的凸轮曲线，都要求曲线有较高的光滑程度，不仅要求连续，而且要求连续的曲率，即二阶导数连续。这就导致了样条插值的产生。

所谓样条(Spline)本来是工程设计中使用的一种绘图工具，它是富有弹性的细木条或细金属条。绘图员利用它把已知点连接成一条光滑曲线，并使连接点处有连续的曲率。

1946年, Schoenberg将样条引入数学。

一 样条函数

由一些具有某些连续性条件的子区间上的分段多项式构成。

1 三次样条函数

设$a \le x_0, x_1, \cdots, x_n \le b$, 如果函数$S(x)$满足:

(1) 在每个小区间$[x_k, x_{k+1}]$上，$S(x)$都是次数≤ 3的多项式;

(2) 在$[a,b]$上$S(x)$具有2阶连续导数，即$S(x) \in C^2[a,b]$

$\Leftrightarrow S(x)$、$S'(x)$、$S''(x)$在区间$[a,b]$上都连续。

则称 $S(x)$为区间$[a,b]$上的三次样条函数。

如，$S(x) = \begin{cases} x^3 - 1, x \in [-1,0] \\ 3x^3 - 1, x \in [0,1] \end{cases}$为$[-1,1]$上的三次样条函数。

2　三次样条插值函数

如果$f(x)$在节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$处的函数值为

$$f(x_j) = y_j, j = 0,1,\cdots,n$$

而三次样条函数$S(x)$满足

$$S(x_j) = y_j, j = 0,1,\cdots,n$$

则称$S(x)$为$f(x)$在$[a,b]$上的三次样条插值函数。

一个例子

已知$f(x)$的数据：

x	-1	0	1
$f(x)$	1	2	-1

，试确定系数$a_i, b_i (i=1,2,3)$，使

$$s(x)=\begin{cases} a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0, x\in[-1,0] \\ b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0, x\in[0,1] \end{cases}$$

成为$f(x)$在$[-1,1]$上满足条件$s''(-1)=s''(1)=0$的三次插值函数。

解

$s(-1)=f(-1)=1$: $\quad -a_3+a_2-a_1+a_0=1 \quad -(1)$

$s(0)=f(0)=2$: $\quad a_0=b_0=2 \quad -(2,3)$

$s(1)=f(1)=-1$: $\quad b_3+b_2+b_1+b_0=-1 \quad -(4)$

$$s'(x)=\begin{cases} 3a_3x^2+2a_2x+a_1, x\in(-1,0) \\ 3b_3x^2+2b_2x+b_1, x\in(0,1) \end{cases}$$

$s'(0-0)=s'(0+0)$: $\quad a_1=b_1 \quad -(5)$

已知$f(x)$的数据：

x	-1	0	1
$f(x)$	1	2	-1

，试确定系数$a_i, b_i (i=1,2,3)$，使

$$s(x)=\begin{cases} a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0, x\in[-1,0] \\ b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0, x\in[0,1] \end{cases}$$

成为$f(x)$在$[-1,1]$上满足条件$s''(-1)=s''(1)=0$的三次插值函数。

$$s''(x)=\begin{cases} 6a_3x+2a_2, x\in(-1,0) \\ 6b_3x+2b_2, x\in(0,1) \end{cases}$$

$s''(0-0)=s''(0+0)$: $\quad 2a_2=2b_2 \quad -(6)$

$s''(-1)=0$: $\quad -6a_3+2a_2=0 \quad -(7)$

$s''(1)=0$: $\quad 6b_3+2b_2=0 \quad -(8)$

联立 (1) – (8) ,解得:

$$a_0=2, a_1=-1, a_2=-3, a_3=-1, b_0=2, b_1=-1, b_2=-3, b_3=1$$

$$\therefore s(x)=\begin{cases} -x^3-3x^2-x+2, x\in[-1,0] \\ x^3-3x^2-x+2, x\in[0,1] \end{cases}$$

3 边界条件

第一类(一阶)边界条件 $S'(x_0)=m_0 \quad S'(x_n)=m_n$

第二类(二阶)边界条件 $S''(x_0)=M_0 \quad S''(x_n)=M_n$

第三类(周期)边界条件 $\lim\limits_{x\to x_0^+} S_0^{(p)}(x)=\lim\limits_{x\to x_n^-} S_{n-1}^{(p)}(x)$

$p=0,1,2$

非扭结(外推)样条 $S_0'''(x)=S_1'''(x),\ \ S_{n-2}'''(x)=S_{n-1}'''(x)$

二 求样条函数的三弯距法

- 设出$s(x)$在各节点的二阶导数值，即

$$\boxed{s''(x_j)=M_j} \qquad (j=0,1,\cdots,n)$$

考虑区间$[x_{j-1},x_j]$，在此区间上，$s(x)=s_j(x)$是三次多项式，故$s_j''(x)$为线性函数，且

$$s_j''(x_{j-1})=s''(x_{j-1})=M_{j-1}，\quad s_j''(x_j)=s''(x_j)=M_j$$

利用线性插值公式，即可得$s_j''(x)$的表达式：

$$s_j''(x)=\frac{x_j-x}{h_j}M_{j-1}+\frac{x-x_{j-1}}{h_j}M_j \quad ，\quad h_j=x_j-x_{j-1}$$

$$s_j''(x)=\frac{x_j-x}{h_j}M_{j-1}+\frac{x-x_{j-1}}{h_j}M_j$$

积分两次后即可得$s_j(x)$的表达式：

$$s_j(x)=\frac{(x_j-x)^3}{6h_j}M_{j-1}+\frac{(x-x_{j-1})^3}{6h_j}M_j+c_1x+c_2$$

将插值条件$s_j(x_{j-1})=y_{j-1},s_j(x_j)=y_j$代入可确定积分常数$c_1$和$c_2$，整理上式得：

$$\boxed{\begin{aligned}s_j(x)=&\frac{(x_j-x)^3}{6h_j}M_{j-1}+\frac{(x-x_{j-1})^3}{6h_j}M_j\\&+(y_{j-1}-\frac{M_{j-1}h_j^2}{6})\frac{x_j-x}{h_j}+(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6})\frac{x-x_{j-1}}{h_j}\end{aligned}}$$

只需确定$M_0,M_1,\cdots,M_n$即可给出$s(x)$的表达式。

对$s_j(x)$求导得：

$$s_j'(x)=-\frac{(x_j-x)^2}{2h_j}M_{j-1}+\frac{(x-x_{j-1})^2}{2h_j}M_j+\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}-\frac{M_j-M_{j-1}}{6}h_j$$

$s(x)$各个节点处的一阶导数存在$s'(x_j^-)=s'(x_j^+)$，即有

$$s_j'(x_j^-)=s_{j+1}'(x_j^+)$$

即：

$$\frac{h_j}{2}M_j-\frac{h_j}{6}(M_j-M_{j-1})+\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}=-\frac{h_{j+1}}{2}M_j-\frac{h_{j+1}}{6}(M_{j+1}-M_j)+\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}$$

整理后得关于M_{j-1}、M_j和M_{j+1}的方程：

三弯距方程

$$\mu_jM_{j-1}+2M_j+\lambda_jM_{j+1}=d_j\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

共$n-1$个方程，附加边界条件，补充两个方程后，即可确定$n+1$个未知量$M_1,\cdots,M_n$。

其中：

$$\begin{cases} \mu_j = \dfrac{h_j}{h_j + h_{j+1}}, \quad \lambda_i = \dfrac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} \qquad \mu_j + \lambda_j = 1 \\ \\ d_j = \dfrac{6}{h_j + h_{j+1}} \left[\dfrac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \dfrac{y_j - y_{j-1}}{h_j} \right] \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n-1)$$

❑ 第一类边界条件：$s'(x_0)=y'_0$，$s'(x_n)=y'_n$

直接代入$s_j(x)$的一阶函数表达式，即得：

$$2M_0+M_1=6\big((y_1-y_0)/h_1-y'_0\big)\big/h_1\equiv d_0$$

$$M_{n-1}+2M_n=6\big(y'_n-(y_n-y_{n-1})/h_n\big)\big/h_n\equiv d_n$$

与前面的$n-1$个方程联立得$n+1$阶线性方程组：

系数矩阵严格对角占优，故可逆，方程组有唯一解.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

□ 第二类边界条件：$S''(x_0)=y''_0,\quad S''(x_n)=y''_n$

直接可得 $\boxed{M_0=y''_0,\quad M_n=y''_n}$

前面方程中只含$n-1$个未知量，即可得$n-1$阶线性方程组:

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1-\mu_1 y''_0 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1}-\lambda_{n-1} y''_n \end{bmatrix}$$

系数矩阵严格对角占优，方程组存在唯一解。

- 第三类边界条件：$S'(x_0)=S'(x_n),\quad S''(x_0)=S''(x_n)$

可得 $\boxed{M_0=M_n,\quad \lambda_n M_1+\mu_n M_{n-1}+2M_n=d_n}$

其中$\lambda_n=h_1/(h_1+h_n),\mu_n=h_n/(h_1+h_n)$

$$d_n=6\big((y_1-y_0)/h_1-(y_n-y_{n-1})/h_n\big)/(h_1+h_n)$$

与前面的$n-1$个方程联立得$n-1$阶线性方程组：

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

系数矩阵严格对角占优，故可逆，方程组有唯一解.

- 综上所述，满足插值条件$S(x_j)=y_j$和某一类边界条件的三次样条函数存在且唯一！

- 具体计算过程

✓ 根据插值条件$S(x_j)=y_j$和给定的边界条件列出相应的方程组；

✓ 解出该方程组的解$M_0,M_1,\cdots,M_n$;

✓ 将$M_0,M_1,\cdots,M_n$代入$S_j(x)$的表达式，写出三次样条函数$S(x)$在整个插值区间上的分段表达式。

例1　对给定的节点和函数值：

k	0	1	2	3
x_k	1	2	4	5
$f(x_k)$	1	3	4	2

求满足自然边界条件$S''(x_0)=S''(x_n)=0$的三次样条插值函数$S(x)$,并求$f(3)$的近似值。

解　由 $\lambda_k=\dfrac{h_k}{h_k+h_{k-1}}$，　$\mu_k=\dfrac{h_{k-1}}{h_k+h_{k-1}}=1-\lambda_k$

$$g_0=3\frac{y_1-y_0}{h_0}-\frac{h_0}{2}f_0'',\quad g_k=3(\lambda_k\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}+\mu_k\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k})$$

$$g_n=3\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}+\frac{h_{n-1}}{2}f_n''$$

得　$\lambda_1=\dfrac{2}{3}$　$\lambda_2=\dfrac{1}{3}$　$\mu_1=\dfrac{1}{3}$　$\mu_2=\dfrac{2}{3}$

$g_0=6$　$g_1=\dfrac{9}{2}$　$g_2=-\dfrac{7}{2}$　$g_3=-6$

代入方程组：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 2/3 & 2 & 1/3 & \\ & 1/3 & 2 & 2/3 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$$

解方程组得：$m_0=\frac{17}{8}, m_1=\frac{7}{4}, m_2=-\frac{5}{4}, m_3=-\frac{19}{8}$

所以

$$S_0(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{7}{4}x-1 \qquad 1\le x\le 2$$

$$S_1(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{7}{4}x-1 \qquad 2\le x\le 4$$

$$S_2(x)=\frac{3}{8}x^3-\frac{45}{8}x^2+\frac{103}{4}x-33 \qquad 4\le x\le 5$$

$$S(x)=\begin{cases} -\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{7}{4}x-1 & 1\le x\le 2 \\ -\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{7}{4}x-1 & 2\le x\le 4 \\ \frac{3}{8}x^3-\frac{45}{8}x^2+\frac{103}{4}x-33 & 4\le x\le 5 \end{cases}$$

$$f(3)\approx S(3)=\frac{17}{4}$$

❑注：关于$S(x)$的表达式，需写成如下形式

$$S_j(x)=a_0(x-x_{j-1})^3+a_1(x-x_{j-1})^2+a_2(x-x_{j-1})+a_3$$

Matlab中三次样条插值函数spline输出的多项式就是按上面的格式输出的！

$$s_j(x)=\frac{(x_j-x)^3}{6h_j}M_{j-1}+\frac{(x-x_{j-1})^3}{6h_j}M_j+(y_{j-1}-\frac{M_{j-1}h_j^2}{6})\frac{x_j-x}{h_j}+(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6})\frac{x-x_{j-1}}{h_j}$$

$$x_j=x_{j-1}+h_j$$

$$s_j(x)=\frac{M_j-M_{j-1}}{6h_j}(x-x_{j-1})^3+\frac{M_{j-1}}{2}(x-x_{j-1})^2+(\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}-\frac{(M_j+2M_{j-1})h_j}{6})(x-x_{j-1})+y_{j-1}$$

三 Matlab插值函数

- yh = interp1(x,y,xh) 一维线性插值$f(x)$

x为插值节点(n维向量), y为函数值(n维向量), xh为插值点(可以是向量)

- yh = interp1(x,y,xh,*method*) 一维线性插值$f(x)$

可指定插值方法:'nearest', 'linear', 'spline', 'pchip'。

省确为线性插值　调用spline函数　调用pchip函数

- interp2(二维)、interp3(三维)、interpn(n维)

具体用法查看Matlab的help文档。

❑ yh = spline(x, y, xh)　　三次样条插值

x为节点（*n*维向量），y为函数值，xh为插值点（可以是向量）

❑ pp = spline(x, y)

返回一个结构类型的数据pp，需用unmkpp函数解开。

[breaks,coefs,nploys,ncofs,dim]=unmkpp(pp)

节点

是个矩阵，第*i*行为$s_i(x)$的系数。

多项式个数*n*

每个多项式的系数个数

维数*m*

- 边界条件的选取
  - ✓ 若x与y的长度相等，则边界条件为:(not-a-knot)

$$f'''(x_0)=f'''(x_1),\ \ f'''(x_{n-1})=f'''(x_n)$$

  - ✓ 若y的长度比x长2，则边界条件为：

$$f'(x_0)=y(1),\ \ f'(x_n)=y(n+2)$$ $$x_0=\min(x), x_n=\max(x)$$

即：$y=[f'(x_0), f(x_0),\cdots, f(x_n), f'(x_n)]$

- yh = ppval(pp,xh)

```
pp=spline(x,y);
yh=ppval(pp,xh)
```

⟷

```
yh=spline(x,y,xh);
```

❑ **pp = csape(x,y,conds)**

可以指定各种边界条件的三次样条插值函数，是Matlab spline toolbox中的函数。

✓ **conds的取值：**

'complete'：第一类边界条件(省确边界条件)

$$f'(x_0)=y(1),\ f'(x_n)=y(n+2)$$

'not-a-knot'：非扭结

'periodic'：周期(第三类)边界条件

'second'：第二类边界条件

'variational'：自然边界条件

✓ 更详细的用法：`help csape / doc csape`

用Matlab函数求三次样条的一个例子

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	0	0.15	1.12	2.36	2.36	1.46	0.49	0.06	0
y'	0								0

如下代码求解上述样条问题:

```
x = -4:4;
y = [0 .15 1.12 2.36 2.36 1.46 .49 .06 0];
cs = spline(x,[0 y 0]);  %y比x多两个元素!
xx = linspace(-4,4,101);%将[-4,4]划分成100等份，以便作出样条插值多项式的图形!
plot(x,y,‘o’,xx,ppval(cs,xx),‘-’);%作样条插值多项式的图形
```

注：'cs'是一个结构变量。

结构变量'cs'为：

```
>> cs
cs =
    form: 'pp'
    breaks: [-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4]
    coefs: [8x4 double]
    pieces: 8
    order: 4
    dim: 1
```

```
>> cs.coefs
ans =
   0.2034  -0.0534       0        0
  -0.0903   0.5569   0.5034   0.150
  -0.3921   0.2859   1.3462   1.1200
   0.1488  -0.8904   0.7417   2.3600
   0.1370  -0.4441  -0.5929   2.3600
   0.1332  -0.0331  -1.0701   1.4600
  -0.0600   0.3666  -0.7366   0.4900
  -0.0633   0.1867  -0.1833   0.0600
```

对应的三次样条插值多项式表达式：

$$S(x)=\begin{cases}0.2034(x-x_0)^3-0.0534(x-x_0)^2\\ -0.0903(x-x_1)^3+0.5569(x-x_1)^2+0.5034(x-x_1)+0.1500\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -0.0633(x-x_8)^3+0.1867(x-x_8)^2-0.1833(x-x_8)+0.0600\end{cases}$$

对应的三次样条插值多项式图形：