第七章　实数的完备性

§1 关于实数集完备性的基本定理

前面我们学习了：戴德金切割原理、确界原理、单调有界定理、致密性定理、柯西收敛准则，这些命题都是从不同方式反映实数集的一种特性，通常称为**实数的完备性**或**实数的连续性**公理。本节再学习见个实数的完备性公理，即区间套定理、聚点定理、有限覆盖定理。最后我们要证明这些命题都是等价的。

一、区间套定理

定义 1　设闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 具有如下性质：

（i）　$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$，　$n=1,2,\cdots$；

（ii）　$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，

则称 $\{[a_n,b_n]\}$ 为**闭区间套**，或简称**区间套**。

这里性质（¡）表明，构成区间套的闭区间列是前一个套着后一个，即各闭区间的端点满足如下不等式：

$$a_1\le a_2\le\cdots\le a_n\le\cdots\le b_n\le\cdots\le b_2\le b_{1.} \tag{1}$$

左端点 $\{a_n\}$ 是单调递增的点列，右端点 $\{b_n\}$ 是单调递减的点列。

定理 1　**（区间套定理）**　若 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一个区间套，则在实数系中存在唯一的一点 ξ，使得 $\xi\in[a_n,b_n]$，$n=1,2,\cdots$，即

$$a_n\le\xi\le b_n,\qquad n=1,2,\cdots. \tag{2}$$

证　（由柯西收敛准则证明）

设 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一区间套. 下面证明 $\{a_n\}$ 是基本点列。

设 $m>n$，由区间套的条件（i）得

$$a_m-a_n=(b_m-a_n)-(b_m-a_m)\le(b_n-a_n)-(b_m-a_m)$$

再由区间套的条件（ii），易知$\{a_n\}$是基本点列。

按 Cauchy 收敛准则，$\{a_n\}$有极限，记为ξ。于是

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left((b_n - a_n) + a_n\right) = \lim_{n\to\infty} a_n = \xi$$

由$\{a_n\}$单调递增，$\{b_n\}$单调递减，易知

$$a_n \le \xi \le b_n，\ n = 1,2,\cdots.$$

下面再证明满足（2）的ξ是唯一的。设数ξ'也满足

$$a_n \le \xi' \le b_n, n = 1,2,\cdots,$$

则由（2）式有

$$|\xi - \xi'| \le b_n - a_n, n = 1,2,\cdots.$$

由区间套的条件（¡¡）得

$$|\xi - \xi'| \le \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0，$$

故有$\xi' = \xi$.

【注 1】区间套定理的通俗解释是，闭区间套必然套住唯一个点（实数），或者必有唯一的一个公共点，或者闭区间套的交集是唯一的一个点。以后这个点我们就称为由区间套所确定的点。

【注 2】 区间套定理中要求各个区间都是闭区间，才能保证定理的结论成立。对于开区间列，如$\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}$，虽然其中各个开区间也是前一个包含后一个，且$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - 0\right) = 0$，但不存在属于所有开区间的公共点.

由区间套定理的证明过程易推得如下很有用的区间套性质：

推论　设ξ是由区间套$\{[a_n, b_n]\}$所确定的点，则对任给的$\varepsilon > 0$，存在N，使得当$n > N$时有

$$[a_n, b_n] \subset U(\xi;\ \varepsilon).$$

二、有限覆盖定理

定义 2 设 S 为数轴上的点集，H 为开区间的集合(即 H 的每一个元素都是形如 (α,β) 的开区间)．若 S 中任何一点都含在 H 中至少一个开区间内，则称 H 为 S 的一个**开覆盖**，或称 H 覆盖 S．若 H 中开区间的个数是无限(有限)的，则称 H 为 S 的一个**无限开覆盖**(**有限开覆盖**)．如果对 S 的任一无限开覆盖 H，总能找到有限子覆盖 $H^*\subset H$，则称点集 S 为**紧集**。

在具体问题中，一个点集的开覆盖常由该问题的某些条件所确定．例如，若函数 f 在 (a,b) 内连续，则给定 $\varepsilon>0$，对每一点 $x\in(a,b)$ ，都可确定正数 δ_x(它依赖于 ε 与 x)，使得当 $x'\in U(x,\delta_x)$ 时，有 $\left|f(x')-f(x)\right|<\varepsilon$．这样就得到一个开区间集

$$H=\left\{(x-\delta_x,x+\delta_x)\middle|x\in(a,b)\right\},$$

它是区间 (a,b) 的一个无限开覆盖.

定理 2 (海涅一博雷尔(Heine—Borel)**有限覆盖定理**) 闭区间是紧集。即设 H 为闭区间 $[a,b]$ 的一个无限开覆盖，则从 H 中可选出有限个开区间来覆盖 $[a,b]$。

证 (由区间套定理证明)

反证。假设定理的结论不成立，即不能用 H 中有限个开区间来覆盖 $[a,b]$.

将 $[a,b]$ 等分为两个子区间，则其中至少有一个子区间不能用 H 中有限个开区间来覆盖．记这个子区间为 $[a_1,b_1]$，则 $[a_1,b_1]\subset[a,b]$，且 $b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a)$.

再将 $[a_1,b_1]$ 等分为两个子区间，同样，其中至少有一个子区间不能用 H 中有限个开区间来覆盖．记这个子区间为 $[a_2,b_2]$，则 $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，且 $b_2-a_2=\frac{1}{2^2}(b-a)$.

重复上述步骤并不断地进行下去，则得到一个闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$，它满足

$$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}],\quad n=1,2,\cdots,$$

$$b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)\to 0(n\to\infty)$$

即 $\{[a_n,b_n]\}$ 是区间套，且其中每一个闭区间都不能用 H 中有限个开区间来覆盖。

由区间套定理，存在唯一的一点 $\xi \in [a_n, b_n]$，$n=1,2,\cdots$．由于 H 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖，故存在开区间 $(\alpha,\beta)\in H$，使 $\xi\in(\alpha,\beta)$．由区间套定理的推论，当 n 充分大时有

$$[a_n,b_n]\subset(\alpha,\beta)$$

这表明 $[a_n,b_n]$ 只须用 H 中的一个开区间 (α,β) 就能覆盖，与挑选 $[a_n,b_n]$ 时的假设"不能用 H 中有限个开区间来覆盖"相矛盾．从而证得必存在属于 H 的有限个开区间能覆盖 $[a,b]$．

【注】 开区间不是紧集。例如，开区间集合 $\left\{(\frac{1}{n+1},1)\right\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 构成了开区间 $(0,1)$ 的一个开覆盖，但不能从中选出有限个开区间盖住 $(0,1)$．

三、聚点定理

定义 3 设 S 为数轴上的点集，ξ 为定点(它可以属于 S，也可以不属于 S)．若 ξ 的任何邻域内都含有 S 中无穷多个点，则称 ξ 为点集 S 的一个**聚点**．

例如，点集 $S=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}\right\}$ 有两个聚点 $\xi_1=-1$ 和 $\xi_2=1$；点集 $S=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 只有一个聚点 $\xi=0$；又若 $S=(a,b)$，则 (a,b) 内每一点以及端点 a、b 都是 S 的聚点；而正整数集 N_+ 没有聚点，任何有限数集也没有聚点．

定理 3 下面三个命题等价

（1）ξ 为点集 S 的聚点；

（2）$\forall\varepsilon>0$，有 $U^0(\xi;\varepsilon)\bigcap S\neq\Phi$。点 ξ 的任何 ε 邻域内都含有 S 中异于 ξ 的点；

（3）若存在各项互异的收敛数列 $\{x_n\}\subset S$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。

其证明作为习题。

定理 4 (魏尔斯特拉斯(Weierstrass)**聚点定理**)　实轴上的任一有界无限点集 S 至少有一个聚点．

致密性定理与聚点定理本质是一样，下面证明二者的等价性。

证　（致密性定理$\Rightarrow$聚点定理）

设S是有界无限点集。在S中取一列两两不同的点列$\{x_n\}$，显然$\{x_n\}$是有界点列。由致密性定理，$\{x_n\}$存在一个收敛的子列$\{x_{n_k}\}$，设其极限为x_0。那么对$\forall\varepsilon>0,\exists K,$当$k>K$时，有$x_0-\varepsilon<x_{n_k}<x_0+\varepsilon$。这就说明$(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$含$S$中无限多个点，即$x_0$是$S$的一个聚点。

（聚点定理$\Rightarrow$致密性定理）

设$\{x_n\}$为有界数列．若$\{x_n\}$中有无限多个相等的项，则由这些项组成的子列是一个常数列，而常数列总是收敛的.

若$\{x_n\}$不含有无限多个相等的项，则其在数轴上对应的点集(仍记为$\{x_n\}$)必为有界无限点集，故由聚点定理，点集$\{x_n\}$至少有一个聚点，记为ξ。由定理 3，则存在$\{x_n\}$的一个收敛子列(以ξ为其极限).

四、实数完备性定理之间的等价性

我们学习如下几个实数的完备性定理:

1. 戴德金切割原理;
2. 确界原理;
3. 单调有界定理;
4. 致密性定理;
5. 柯西收敛准则;
6. 区间套定理;
7. 有限覆盖定理;
8. 聚点定理。

实际上它们之间都是等价的。并且已经军完成了如下证明：

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
(1) & & & & (8) & & & & & & \\
\Updownarrow & & & & \Updownarrow & & & & & & \\
(2) & \Rightarrow & (3) & \Rightarrow & (4) & \Rightarrow & (5) & \Rightarrow & (6) & \Rightarrow & (7)
\end{array}
$$

下面只要再完成$(7)\Rightarrow(2)$，就证明了这些定理的等价性。见下例 1。

例 1　由有限覆盖定理证明确界原理。

证 设S为非空数集，且S有上界，下面证明则S必有上确界。

设S的上界为M，任取$x_0\in S$，考虑闭区间$[x_0,M]$。假设S无上确界，那么$\forall x\in[x_0,M]$有

（1）当x为S的上界时，必有一个更小的上界$x_1<x$，因此x必有一个邻域Δ_x，其中皆为S的上界；

（2）当x为S的上界时，自然有S中的点$x_2>x$，因此x必有一个邻域Δ_x，其中皆不是S的上界。

这样对$[x_0,M]$中的每一点x都有一个邻域Δ_x，它要属于第一类（即每一点都是S的上界），要么属于第二类（即每一点都不是S的上界）。显然

$$H=\left\{\Delta_x\mid x\in[x_0,M]\right\}$$

构成了$[x_0,M]$的开覆盖。根据有限覆盖定理，必有有限子覆盖

$$H^*=\left\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_k\right\}\subset H$$

注意到对应点M的邻域是第一类的，且$\Delta_i(i=1,2,\cdots,k)$有公共点，也都是第一类的，从而对应点x_0的邻域也是第一类的，矛盾。

下面再给出几例子，来说明以上八个公理之间可以互推。

例 2　区间套定理$\Rightarrow$确界原理。

证 设非空数集S有上界M。若S有最大值，则得证。否则，

任取$x_0\in S$，记$\left[a_1,b_1\right]=[x_0,M]$，把$\left[a_1,b_1\right]$等分，如右半区间含$S$的点，记右半区间为$\left[a_2,b_2\right]$，否则记左半区间为$\left[a_2,b_2\right]$。再把$\left[a_2,b_2\right]$等分，同上考虑，得区间套$\left\{\left[a_n,b_n\right]\right\}$。

记区间套所确定的唯一点为ξ，$a_n\le\xi\le b_n$。由做法，$\left[a_n,b_n\right]$的右边不含S的点，即$\forall x\in S,x\le b_n$，取极限便得$\forall x\in S,x\le\xi$，说明ξ是S的一个上界。

另外，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，$\left[a_n,b_n\right]\subset(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$。由做法，$\left[a_n,b_n\right]$含$S$的

点，故存在$x\in S, x>\xi-\varepsilon$。这说明$\xi$是$S$的上确界。

例 3 区间套定理$\Rightarrow$柯西收敛准则

证　按柯西收敛准的假设，对任给的$\varepsilon>0$，存在$N>0$，使得对一切$n\geq N$有$\left|a_n-a_N\right|\leq\varepsilon$，即在区间$\left[a_n-\varepsilon, a_N+\varepsilon\right]$内含有$\left\{a_n\right\}$中几乎所有的项(这里及以下，为叙述简单起见，我们用"$\left\{a_n\right\}$中几乎所有的项"表示"$\left\{a_n\right\}$中除有限项外的所有项").

据此，令$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，则存在N_1，在区间$\left[a_{N_1}-\dfrac{1}{2}, a_{N_1}+\dfrac{1}{2}\right]$内含有$\left\{a_n\right\}$中几乎所有的项. 记这个区间为$\left[\alpha_1,\beta_1\right]$.

再令$\varepsilon=\dfrac{1}{2^2}$，则存在$N_2(>N_1)$，在区间$\left[a_{N_2}-\dfrac{1}{2^2}, a_{N_2}+\dfrac{1}{2^2}\right]$内含有$\left\{a_n\right\}$中几乎所有的项．记

$$\left[\alpha_2,\beta_2\right]=\left[a_{N_2}-\frac{1}{2^2}, a_{N_2}+\frac{1}{2^2}\right]\bigcap\left[\alpha_1,\beta_1\right],$$

它也含有$\left\{a_n\right\}$中几乎所有的项，且满足

$$\left[\alpha_1,\beta_1\right]\supset\left[\alpha_2,\beta_2\right]\text{及}\beta_2-\alpha_2\leq\frac{1}{2}$$

继续依次令$\varepsilon=\dfrac{1}{2^3},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$，照以上方法得一闭区间列$\left\{\left[\alpha_n,\beta_n\right]\right\}$，其中每个区间都含有$\left\{a_n\right\}$中几乎所有的项．且满足

$$\left[\alpha_n,\beta_n\right]\supset\left[\alpha_{n+1},\beta_{n+1}\right], n=1,2,\cdots,\ \beta_n-\alpha_n\leq\frac{1}{2^{n-1}}\to 0\quad(n\to\infty)$$

即$\left\{\left[\alpha_n,\beta_n\right]\right\}$是区间套．由区间套定理，存在唯一的一个数$\xi\in\left[\alpha_n,\beta_n\right]\left(n=1,2,\cdots,\right)$，

现在证明数ξ就是数列$\left\{a_n\right\}$的极限．事实上，由区间套定理的推论，对任给的$\varepsilon>0$，存在$N>0$，使得当$n>N$时有

$$\left[\alpha_n,\beta_n\right]\subset U(\xi;\varepsilon)$$

因此在$U(\xi;\varepsilon)$内含有$\left\{a_n\right\}$中除有限外的所有项，这就证得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$.

例 4　有限覆盖定理$\Rightarrow$聚点定理。

证　反证。设S是有界无限点集，但S没有聚点。取$[a,b]\supset S$，由于S没有聚点，所

以对 $\forall x \in [a,b]$，取 δ_x 充分小，$U(x,\delta_x)$ 不含 S 中异于 x 的点, 即 $U(x,\delta_x)$ 最多只含 S 的一点。令

$$H = \{U(x,\delta_x) \mid x \in [a,b]\}$$

则 H 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖。根据有限覆盖定理，可找到有限个 $U(x,\delta_x)$ 覆盖 $[a,b]$（自然也覆盖 S ），这与 S 是无限点集矛盾。

例 5　区间套定理$\Rightarrow$聚点定理。

证　因 S 为有界点集，故存在 $M > 0$，使得 $S \subset [-M, M]$，记 $[a_1, b_1] = [-M, M]$

现将 $[a_1, b_1]$ 等分为两个子区间. 因 S 为无限点集，故两个子区间中至少有一个含有 S 中无穷多个点，记此子区间为 $[a_2, b_2]$，则 $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2]$ 且

$$b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = M$$

再将 $[a_2, b_2]$ 等分为两个子区间，则其中至少有一个子区间含有 S 中无穷多个点，取出这样的一个子区间，记为 $[a_3, b_3]$，则 $[a_2, b_2] \supset [a_3, b_3]$，且

$$b_3 - a_3 = \frac{1}{2}(b_2 - a_2) = \frac{M}{2}$$

将此等分子区间的手续无限地进行下去，得到一个区间列 $\{[a_n, b_n]\}$，它满足

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}],\ n = 1,2,\cdots,$$

$$b_n - a_n = \frac{M}{2^{n-1}} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

即 $\{[a_n, b_n]\}$ 是区间套，且其中每一个闭区间都含有 S 中无穷多个点.

由区间套定理，存在唯一的一点 $\xi \in [a_n, b_n]$，$n = 1,2,\cdots,$. 于是由区间套定理的推论，对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，当 $n > M$ 时有 $[a_n, b_n] \subset U(\xi;\varepsilon)$. 从而 $U(\xi;\varepsilon)$ 内含有 S 中无穷多个点，　ξ 为 S 的一个聚点.

五、闭区间上连续函数性质的证明

闭区间上连续函数的性质有：

（1）最值性；

（2）有界性；

（3）根的存在性；

（4）介值性；

（5）一致连续性。

前面我们致密性定理证明了最值性（从而也证明了有界性），由确界原理证明了根的存在定理（从而也证明了介值性），由致密性定理证明了一致连续性。

下面，我们再给出利用实数完备性公理来证明闭区间上连续函数性质的几个例子.

例 6　用有限覆盖定理证明有界性定理：若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

证　由连续函数的局部有界性，对每一点 $x'\in[a,b]$，都存在邻域 $U(x';\delta_{x'})$ 及正数 $M_{x'}$，使得

$$\left|f(x)\right|\le M_{x'},x\in U(x';\delta_{x'})\bigcap[a,b]$$

考虑开区间集

$$H=\left\{U(x';\delta_{x'})\middle|\ x'\in[a,b]\right\}$$

显然 H 是 $[a,b]$ 的一个无限开覆盖．由有限覆盖定理，存在 H 的一个有限子集

$$H^*=\left\{U\left(x_i;\delta_i\right)\middle|x_i\in[a,b],i=1,2,\cdots,k\right\}$$

覆盖了 $[a,b]$，且存在正数 $M_1,M_2,\cdots,M_k$，使得对一切 $x\in U\left(x_i;\delta_i\right)\bigcap[a,b]$ 有

$$\left|f\left(x\right)\right|\le M_i,i=1,2,\cdots,k.$$

令

$$M=\max_{1\le i\le k}M_i,$$

则对任何 $x\in[a,b]$，x 必属于某 $U\left(x_i;\delta_i\right)\Rightarrow\left|f\left(x\right)\right|\le M_i\le M$．即证得 f 在 $[a,b]$ 上有界.

例 7 用确界原理证明最值性定理：若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上有最大值与最小值.

证　由有界性定理，f 在 $[a,b]$ 上有界，故由确界原理，f 有上确界，记为 M．以下我们证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使 $f\left(\xi\right)=M$．倘若不然，对一切 $x\in[a,b]$ 都有 $f\left(x\right)<M$．令

$$g(x)=\frac{1}{M-f(x)},x\in[a,b]$$

易见g在$[a,b]$连续, 故g在$[a,b]$有上界（有界性定理）. 设G是g的一个上界, 则

$$0<g(x)=\frac{1}{M-f(x)}\le G,x\in[a,b]$$

从而推得

$$f(x)\le M-\frac{1}{G},x\in[a,b]$$

但这与M为f的上确界矛盾. 故必存在$\xi\in[a,b]$, 使$f(\xi)=M$, 即f在$[a,b]$上有最大值, 同理可证f在$[a,b]$上有最小值.

例 8　用区间套定理证明根的存在性定理：若函数f在$[a,b]$上连续，$f(a)<0$，$f(b)>0$，则存在$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)=0$.

证　将$[a,b]$等分为两个子区间$[a,c]$与$[b,c]$. 若$f(c)=0$，则c即为所求；若$f(c)\ne 0$，则当$f(c)>0$时，记$[a_1,b_1]=[a,c]$，当$f(c)<0$时，记$[a_1,b_1]=[c,b]$。于是有

$$f(a_1)<0,f(b_1)>0\text{，且 }[a_1,b_1]\subset[a,b],b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a).$$

再从区间$[a_1,b_1]$出发，重复上述过程，得到：或者在$[a_1,b_1]$的中点c_1上有$f(c_1)=0$，或者有闭区间$[a_2,b_2]$，满足$f(a_2)<0,f(b_2)>0$，且

$$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1],b_2-a_2=\frac{1}{2^2}(b-a)$$

将上述过程不断地进行下去，可能出现两种情形：

(1)　在某一区间的中点c_i上有$f(c_i)=0$，则c_i即为所求；

(2)　在任一区间的中点c_i上均有$g(c_i)\ne 0$，则得到闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$, 满足$f(a_n)<0,f(b_n)>0$，且

$$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n],b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a),n=1,2,\cdots.$$

由区间套定理，存在点$x_0\in[a_n,b_n],n=1,2,\cdots$. 下证. $f(x_0)=0$，倘若$f(x_0)\ne 0$，不妨

设 $f\left(x_0\right)>0$，则由局部保号性，存在$U\left(x_0;\delta\right)$,使在其内有 $f\left(x\right)>0$．而由区间套定理的推论，当n充分大时有$\left[a_n,b_n\right]\subset U\left(x_0;\delta\right)$，因而有 $f\left(a_n\right)>0$．但这与$\left[a_n,b_n\right]$选取时应满足的 $f\left(a_n\right)<0$相矛盾，故必有 $f\left(x_0\right)=0$。

例 9　用有限覆盖定理证明一致连续性定理：若函数 f 在闭区间$[a,b]$上连续，则 f 在$[a,b]$上一致连续.

证　由 f 在$[a,b]$上的连续性，任给$\varepsilon>0$，对每一点$x\in[a,b]$，都存在$\delta_x>0$，使得当$x'\in U(x;\delta_x)$时有

$$\left|f(x')-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

考虑开区间集合$\mathrm{H}=\left\{U\left(x,\frac{\delta_x}{2}\right)\middle|x\in[a,b]\right\}$。显然$H$是$[a,b]$的一个开覆盖．由有限覆盖定理，存在$H$的一个有限子集

$$\mathrm{H}^*=\left\{U\left(x_i,\frac{\delta_i}{2}\right)\middle|i=1,2,\cdots,k\right\}$$

覆盖了$[a,b]$．记$\delta=\min\limits_{1\le i\le k}\left\{\frac{\delta_i}{2}\right\}>0$

对任何x'，$x''\in[a,b]$，$\left|x'-x''\right|<\delta$，$x'$必属于$\mathrm{H}^*$中某开区间，设$x'\in U\left(x_i;\frac{\delta_i}{2}\right)$即$\left|x'-x_i\right|<\frac{\delta_i}{2}$. 此时有

$$\left|x''-x_i\right|\le\left|x''-x'\right|+\left|x'-x_i\right|<\delta+\frac{\delta_i}{2}\le\frac{\delta_i}{2}+\frac{\delta_i}{2}=\delta_i$$

故由(2)式同时有

$$\left|f(x')-f(x_i)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\ \text{和}\left|f(x'')-f(x_i)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

由此得$\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$. 所以 f 在$[a,b]$上一致连续.

例 10　用有限覆盖定理证明根的存在定理。

证　设 $f\left(x\right)$在$\left[a,b\right]$上连续 $f\left(a\right)$与 $f\left(b\right)$异号，现证方程 $f\left(x\right)=0$在$\left(a,b\right)$内至少有

一实根。

假设方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内无实根，则对每一点 $x\in[a,b]$，有 $f(x)\neq 0$，据 $f(x)$ 连续性，存在正数 δ_x，使得 $f(x)$ 在 $U(x,\delta_x)\cap[a,b]$ 上与点 x 处的函数值 $f(x)$ 同号. 令

$$H=\{U(x,\delta_x)\mid x\in[a,b]\}$$

则 H 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 据有限覆盖定理，H 中必存在有限个邻域能覆盖 $[a,b]$. 设这有限个邻域为：

$$U(x_1,\delta_{x_1}),U(x_2,\delta_{x_2}),\ldots,U(x_n,\delta_{x_n})$$

且 $x_1<x_2<\ldots x_n$.不妨设其中任意两个邻域无包含关系（否则，去掉被包含的邻域仍能覆盖 $[a,b]$），于是

$$U(x_{j-1},\delta_{x_{j-1}})\cap U(x_j,\delta_{x_j})\neq\varnothing(j=2,3\ldots,n).$$

而 $f(x)$ 在每个 $U(x_j,\delta_{x_j})$ 内不变号，由此推得 $f(x)$ 在 $\bigcup_{j=1}^{n}U(x_j,\delta_{x_j})$ 内不变号，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，这与题设 $f(a),f(b)$ 异号矛盾.

§2 上极限和下极限

上（下）极限是极限理论的重要组成部分，也是后面研究级数理论的有力工具。

类似于数集的聚点定义，定义数列的聚点如下：

定义 1 若数 a 的任一邻域都含有数列 $\{x_n\}$ 的无限多个项，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的一个**聚点**（也称**极限点**）。

显然 $\{x_n\}$ 的聚点就是 $\{x_n\}$ 收敛子列的极限点。

例如，数列 $\{0,1,0,1,0,1,\cdots\}$ 有两个聚点 0 和 1，数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 有一个聚点 0 。

定理 1 有界点列 $\{x_n\}$ 至少有一个聚点，且存在最大与最小聚点。

证　关于聚点存在性的证明，只需在第 1 节例 5“区间套定理 $\Rightarrow$ 聚点定理”的证明过程中，把“无限多个点”改为“无限多个项”。

至于最大聚点的存在性，只需在第 1 节例 5 的证明过程中，当每次把区间$\left[a_{n-1},b_{n-1}\right]$等分为两个子区间时，若右边一个含有$\{x_n\}$中的无限多项，则取它为$\left[a_n,b_n\right]$，否则取左边子区间为$\left[a_n,b_n\right]$。这样每个$\left[a_n,b_n\right]$都含有$\{x_n\}$中的无限多项，且在$\left[a_n,b_n\right]$的右边至多只有$\{x_n\}$中的有限项。易知由区间套$\{[a_n,b_n]\}$所确定的点$\overline{A}$即为$\{x_n\}$的最大聚点。若不然，设有$\{x_n\}$的聚点$A>\overline{A}$，则令$\delta=\dfrac{1}{3}(A-\overline{A})$，在$U(A,\delta)$中含有$\{x_n\}$的无限多项。但当$n$充分大时，$U(A,\delta)$将落在$\left[a_n,b_n\right]$的右边，这与在$\left[a_n,b_n\right]$的右边至多只有$\{x_n\}$中的有限项相矛盾。

类似可证，$\{x_n\}$存在最小聚点$\underline{A}$。

定理 2 设$\{x_n\}$为有界数列

（一）下面三个命题等价：

（1）$\overline{A}$为$\{x_n\}$的最大聚点。

（2）$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，有$x_n<\overline{A}+\varepsilon$，又有子列$x_{n_k}>\overline{A}-\varepsilon$。

（3）$\overline{A}=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$

（二）下面三个命题等价：

（1）$\underline{A}$为$\{x_n\}$的最小聚点。

（2）$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，有$x_n>\underline{A}-\varepsilon$，又有子列$x_{n_k}<\underline{A}+\varepsilon$。

（3）$\underline{A}=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$

证 （1）$\Rightarrow$（2）

设$\overline{A}$为$\{x_n\}$的最大聚点，由$\overline{A}$是聚点，知对$\forall\varepsilon>0$，$U(\overline{A},\varepsilon)$含有$\{x_n\}$的无穷多项；再由$\overline{A}$是最大聚点，知在$\overline{A}+\varepsilon$的右边最多只含$\{x_n\}$的有限项（否则在$\overline{A}+\varepsilon$的右边还有聚点，它大于$\overline{A}$，与$\overline{A}$是最大聚点矛盾）。

（2）$\Rightarrow$（1）

由假设，对$\forall\varepsilon>0$，$U(\overline{A},\varepsilon)$含有$\{x_n\}$的无穷多项，故$\overline{A}$是一个聚点。设$\alpha>\overline{A}$，

取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}(\alpha-\overline{A})$，由假设在$U(\alpha,\varepsilon_0)$最多只含$\{x_n\}$的有限项，故$\alpha$不可能是$\{x_n\}$的聚点，说明$\overline{A}$是最大聚点。

（2）$\Rightarrow$（3）

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，有$x_n<\overline{A}+\varepsilon$，从而

$$\beta_n=\sup\{x_n,x_{n+1},\cdots\}\le\overline{A}+\varepsilon,\ \Rightarrow\lim_{n\to\infty}\beta_n\le\overline{A}+\varepsilon\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\beta_n\le\overline{A}$$

又有子列$x_{n_k}>\overline{A}-\varepsilon$。从而$\beta_n=\sup\{x_n,x_{n+1},\cdots\}\ge\overline{A}-\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n\ge\overline{A}$

（3）$\Rightarrow$（2）

设$\beta_n=\sup\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$，$\{\beta_n\}\downarrow\overline{A}$，从而对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，有

$$\overline{A}\le\beta_n=\sup\{x_n,x_{n+1},\cdots\}<\overline{A}+\varepsilon$$

说明$n>N$时，$x_n<\overline{A}+\varepsilon$。还有子列$x_{n_k}>\overline{A}-\varepsilon$。否则的话，存在$\varepsilon_0$和$N_0$，当$n>N_0$时，有$x_n\le\overline{A}-\varepsilon_0$，从而$\beta_n=\sup\{x_n,x_{n+1},\cdots\}\le\overline{A}-\varepsilon_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\overline{A}\le\overline{A}-\varepsilon_0$，矛盾。

定义 2 定理 2 中的$\overline{A}$与$\underline{A}$分别称为数列$\{x_n\}$的上极限与下极限，记为

$$\overline{A}=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n,\underline{A}=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n$$

显然

（1）$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\le\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=A$

例 1 设$u_n>0$，证明$\underline{\lim}\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\underline{\lim}\sqrt[n]{u_n}\le\overline{\lim}\sqrt[n]{u_n}\le\overline{\lim}\frac{u_{n+1}}{u_n}$

证 先证 $\overline{\lim}\sqrt[n]{u_n}\le\overline{\lim}\frac{u_{n+1}}{u_n}$

设$\overline{\lim}\frac{u_{n+1}}{u_n}=a$，如果$a=+\infty$，结论显然成立。

如果$a<+\infty$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n\ge N$时，有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<a+\varepsilon,\ \frac{u_n}{u_N}=\frac{u_n}{u_{n-1}}\cdot\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\cdots\frac{u_{N+1}}{u_N}\le(a+\varepsilon)^{n-N},$$

$$u_n \le u_N(a+\varepsilon)^{n-N},$$

$$\sqrt[n]{u_n} \le \sqrt[n]{u_N(a+\varepsilon)^{n-N}} = \sqrt[n]{u_N(a+\varepsilon)^{-N}} \cdot (a+\varepsilon)$$

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{u_n} \le \overline{\lim}\sqrt[n]{u_N(a+\varepsilon)^{-N}} \cdot (a+\varepsilon) = a+\varepsilon$$

由ε的任意性，$\overline{\lim}\sqrt[n]{u_n} \le a$。

再证 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$

记$\varliminf\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$

（1）$q=0$，结论显然成立。

（2）$0<q<+\infty$，由下极限定义

$\forall\varepsilon>0(\varepsilon<q)$，$\exists N$，当$n\ge N$时，有$\frac{u_{n+1}}{u_n} > q-\varepsilon$。从而

$$\frac{u_n}{u_N} = \frac{u_n}{u_{n-1}}\cdot\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\cdots\frac{u_{N+1}}{u_N} > (q-\varepsilon)^{n-N}$$

$$u_n > u_N(q-\varepsilon)^{n-N}$$

$$\sqrt[n]{u_n} > \sqrt[n]{u_N(q-\varepsilon)^{n-N}} = \sqrt[n]{u_N(q-\varepsilon)^{-N}} \cdot (q-\varepsilon)$$

两边取下极限

$$\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} \ge q-\varepsilon$$

由ε的任意性，$\varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} \ge q$。

（3）$q=+\infty$，此时$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$。

对$\forall G>0$，$\exists N$，当$n\ge N$时有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > G，\quad u_n > u_N G^{n-N}$$

$$\sqrt[n]{u_n} > \sqrt[n]{u_N G^{-N}} \cdot G$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_N G^{-N}}=1$，所以$n\geq N_1$时，$\sqrt[n]{u_N G^{-N}}>\dfrac{1}{2}$

这样，$n\geq\max(N,N_1)$时，$\sqrt[n]{u_n}>\dfrac{1}{2}G$。说明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=+\infty$，结论也成立。

推论 设$u_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=a\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=a$

（反之不成立）

【注】在后面的级数理论中，上面不等式，是“根式判别法比比式判别法更有效”的依据。