第四讲

数列的性质 2

例3 设 $a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 据极限的保号性, 存在$N$, 当 $n>N$ 时, 有 $\dfrac{a}{2} < a_n < \dfrac{3a}{2}$, 即

$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3a}{2}}.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{a}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3a}{2}} = 1$, 所以由极限的迫敛性, 证得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

例4 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}\ (a\neq -1)$.

解 (1) $|a|<1$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$，所以由极限四则运算法则, 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a^n}{1+\lim\limits_{n\to\infty}a^n}=0.$

(2) $a=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}.$

(3) $|a|>1$, 因 $\lim\limits_{n\to\infty}(1/a^n)=0$，故得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/a^n}=\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}(1/a^n)}=1.$$

例5 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 m 个正数, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

证 设 $a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$. 由

$$a \le \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \le \sqrt[n]{m}\,a,$$

与

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}\,a = \lim_{n\to\infty} a = a,$$

以及极限的迫敛性, 得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

定义1

设 $\{a_n\}$ 为数列，$\{n_k\}$为N_+的无限子集,且

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots,$$

则数列 $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$

称为 $\{a_n\}$ 的子列，简记为 $\{a_{n_k}\}$.

注 由定义,$\{a_n\}$的子列$\{a_{n_k}\}$的各项均选自$\{a_n\}$,且保持这些项在$\{a_n\}$中的先后次序. $\{a_{n_k}\}$中的第 k 项是$\{a_n\}$中的第 n_k 项，故总有 $n_k \geq k$.

例如 $\{a_{2n}\},\{a_{2n-1}\}$均是$\{a_n\}$的子列.

定理2.8

数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是$\{a_n\}$的任意子列$\{a_{n_k}\}$都收敛(且相等).

证（充分性） 因为$\{a_n\}$也是本身的一个子列，所以充分性显然成立.

（必要性） 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当$n > N$时, $|a_n - a| < \varepsilon$. 设$\{a_{n_k}\}$是$\{a_n\}$的任意一个子列. 因 $n_k \ge k$, 故$k > N$ 时, $n_k \ge k > N$, 也有 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. 这就证明了

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

注 由定理 2.8 可知，若一个数列的两个子列收敛于不同的值，则此数列必发散.

例6 证明 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 的充要条件是 $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = a.$

证（必要性） 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N, n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

因为$2n > N, 2n-1 \geq N$,所以

$$|a_{2n-1} - a| < \varepsilon,\quad |a_{2n} - a| < \varepsilon.$$

(充分性) 设 $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} a_{2k} = a$，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists K$,

当 $k > K$ 时，$|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$，$|a_{2k} - a| < \varepsilon$.

令 $N = 2K$, 当 $n > N$ 时，有 $|a_n - a| < \varepsilon$,

所以 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

例7 若 $a_n=(-1)^n(1-\frac{1}{n})$. 证明数列 $\{a_n\}$ 发散.

证 显然

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} -(1-\frac{1}{2k-1}) = -1;$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty}(1-\frac{1}{2k}) = 1.$$

因此，数列 $\{a_n\}$ 发散.