# 第十二讲

## 麦克劳林公式的例

**例1** 验证下列公式:

1. $$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

2. $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m});$$

3. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1});$$

4. $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

**5.** $$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+o(x^{n});$$

**6.** $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^{2}+\cdots+x^{n}+o(x^{n}).$$

以上这些公式均为最基本的泰勒公式(麦克劳林公式), 请务必牢记.

下面验证 1 和 6, 其余请读者自己验证.

**验证 1** 因为 $f^{(k)}(x)=\mathrm{e}^x$，所以

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1.$$

于是 $\mathrm{e}^x$ 的 $n$ 阶麦克劳林公式为

$$\mathrm{e}^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n).$$

---

1. $\mathrm{e}^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n);$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

**验证 6** 设 $g(x)=\dfrac{1}{1-x}$，则 $g'(x)=\dfrac{1!}{(1-x)^2}$，

$$g''(x)=\frac{2!}{(1-x)^3},\cdots,\quad g^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}},$$

故

$$g(0)=1,\ g'(0)=1!,\ g''(0)=2!,\ \cdots,g^{(n)}(0)=n!.$$

于是 $\dfrac{1}{1-x}$ 在 $x=0$ 的 $n$ 阶麦克劳林公式为

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n).$$

---

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n).$$

**例2** 求 $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的麦克劳林公式, 并求 $f^{(98)}(0)$ 与 $f^{(99)}(0)$.

**解** 由例1， $\mathrm{e}^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$,

于是

$$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^n\cdot n!}+o(x^{2n}).$$

由定理 6.9 的注 2, 可知上式就是 $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的麦克劳林公式，由泰勒系数公式可知 $x^{98}$和$x^{99}$的系数为

$$\frac{1}{98!}f^{(98)}(0)=\frac{(-1)^{49}}{2^{49}\cdot 49!},\qquad \frac{1}{99!}f^{(99)}(0)=0,$$

于是得到 $f^{(98)}(0)=-\dfrac{98!}{2^{49}\cdot 49!}$, $f^{(99)}(0)=0.$

**例3** 求 $\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=1$ 的泰勒公式.

**解** 利用 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$.

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}=\frac{1}{1-[-(x-1)]}$$

$$=1-(x-1)+(x-1)^2+\cdots$$

$$+(-1)^n(x-1)^n+o((x-1)^n).$$

下面这个例题是说明如何利用泰勒公式来求极限.

**例4** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2)-\mathrm{e}^{-x^2}-\sin x^3+1}{x^3}$.

**解** 因为 $\ln(1-x^2)=-x^2-\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)=-x^2+o(x^3)$,

$$\mathrm{e}^{-x^2}=1-x^2+o(x^3),\qquad \sin x^3=x^3+o(x^3),$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)-\mathrm{e}^{-x^2}-\sin x^3+1}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2-1+x^2-x^3+1+o(x^3)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^3+o(x^3)}{x^3}=-1.$$

本题虽然可用洛必达法则来求，但上法比较简单 .