数学分析　第三章
函数极限

在本章,我们将讨论函数极限的基本概念和重要性质.作为数列极限的推广,函数极限与数列极限之间有着密切的联系,它们之间的纽带就是归结原理.

§1 函数极限概念

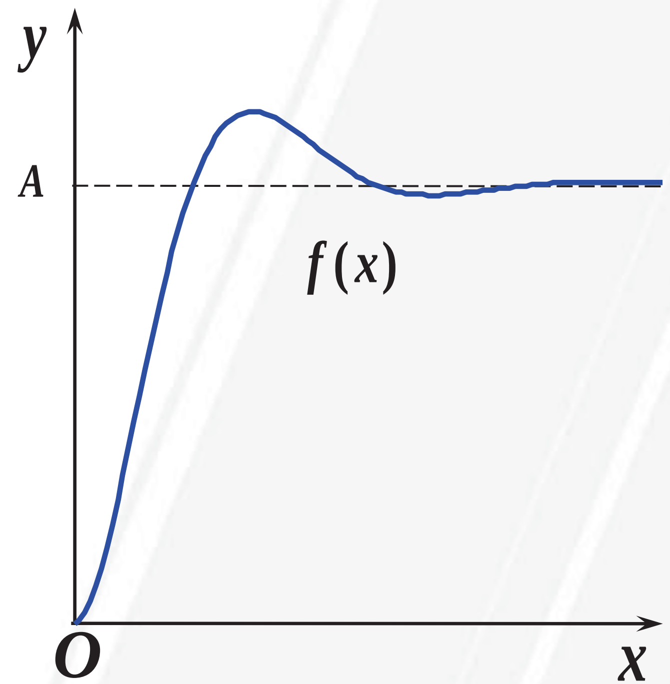
*点击以上标题可直接前往对应内容

第一讲

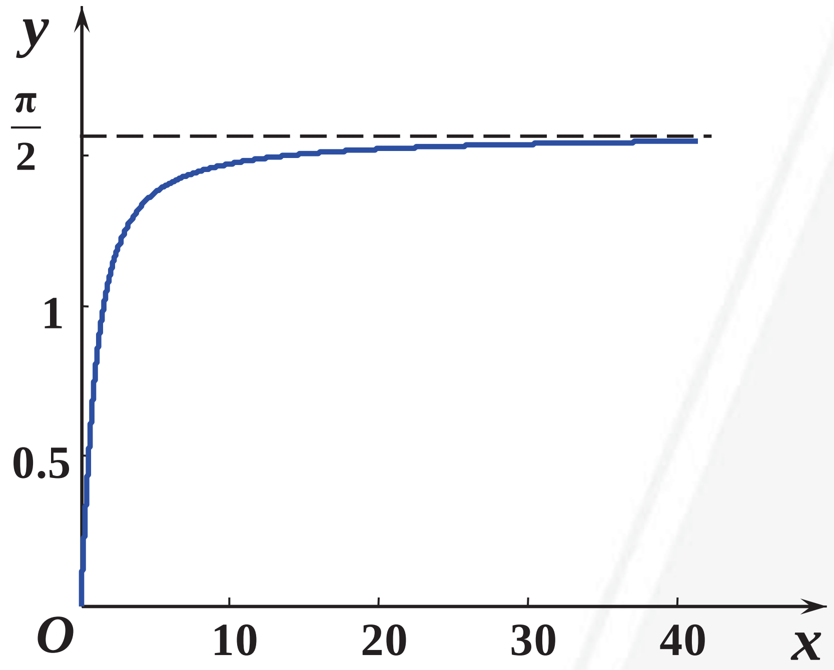
函数极限的概念

x趋于∞时的函数极限

设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,+\infty)$ 上，当 x 沿着 x 轴的正向无限远离原点时，函数 $f(x)$ 也无限地接近 A，我们就称 $f(x)$ 当 x 趋于 $+\infty$ 时以 A 为极限.



例如 函数 $y = \arctan x$，当 x 趋于$+\infty$时，以 $\dfrac{\pi}{2}$为极限.



定义1

设 f 为定义在 $[a,+\infty)$ 上的一个函数． A 为常数.

若对于任意正数 $\varepsilon>0$, 存在$M(\geq a)$, 使得

当$x>M$ 时,

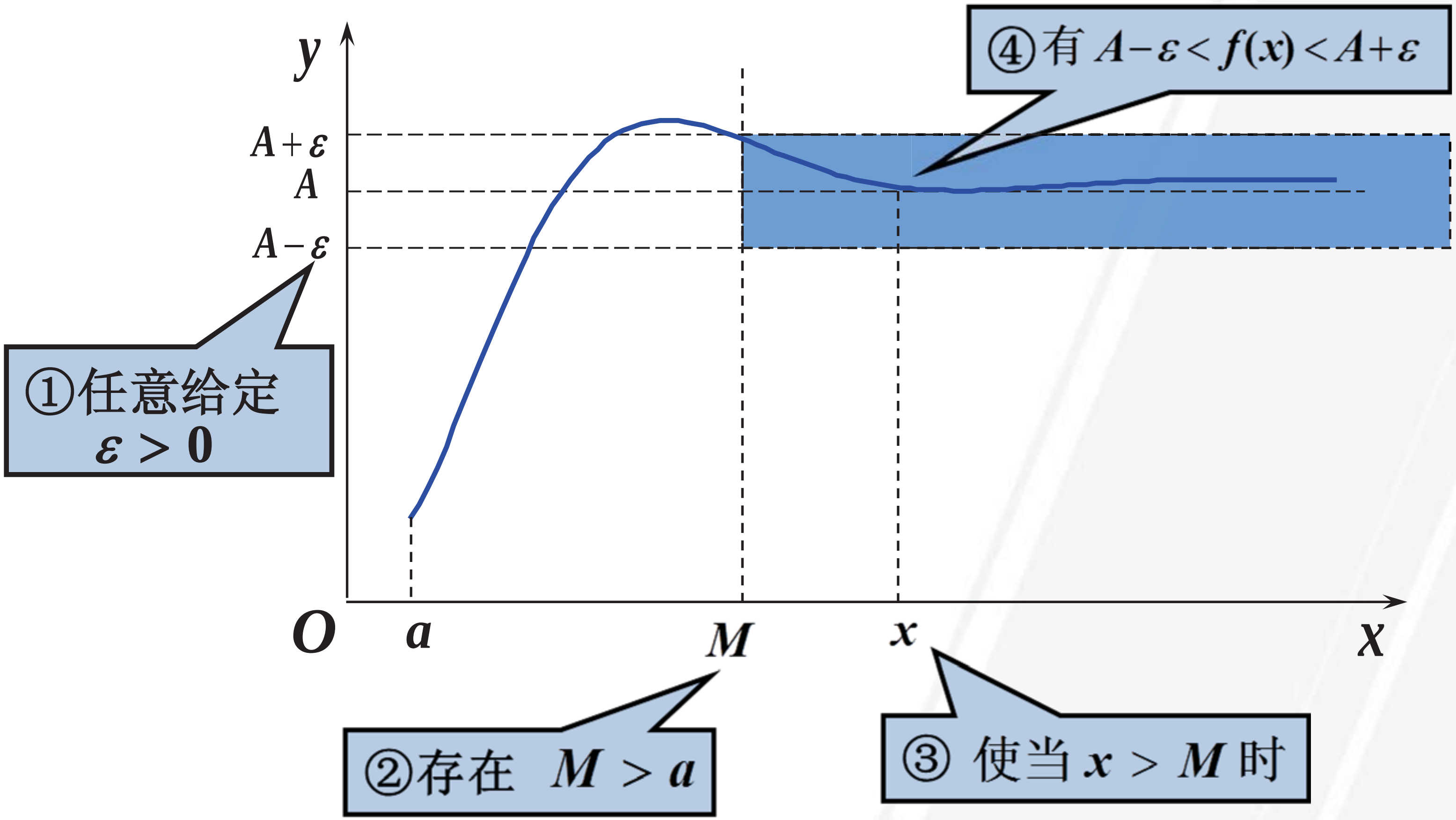
$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于$+\infty$时以 A 为极限.

记为

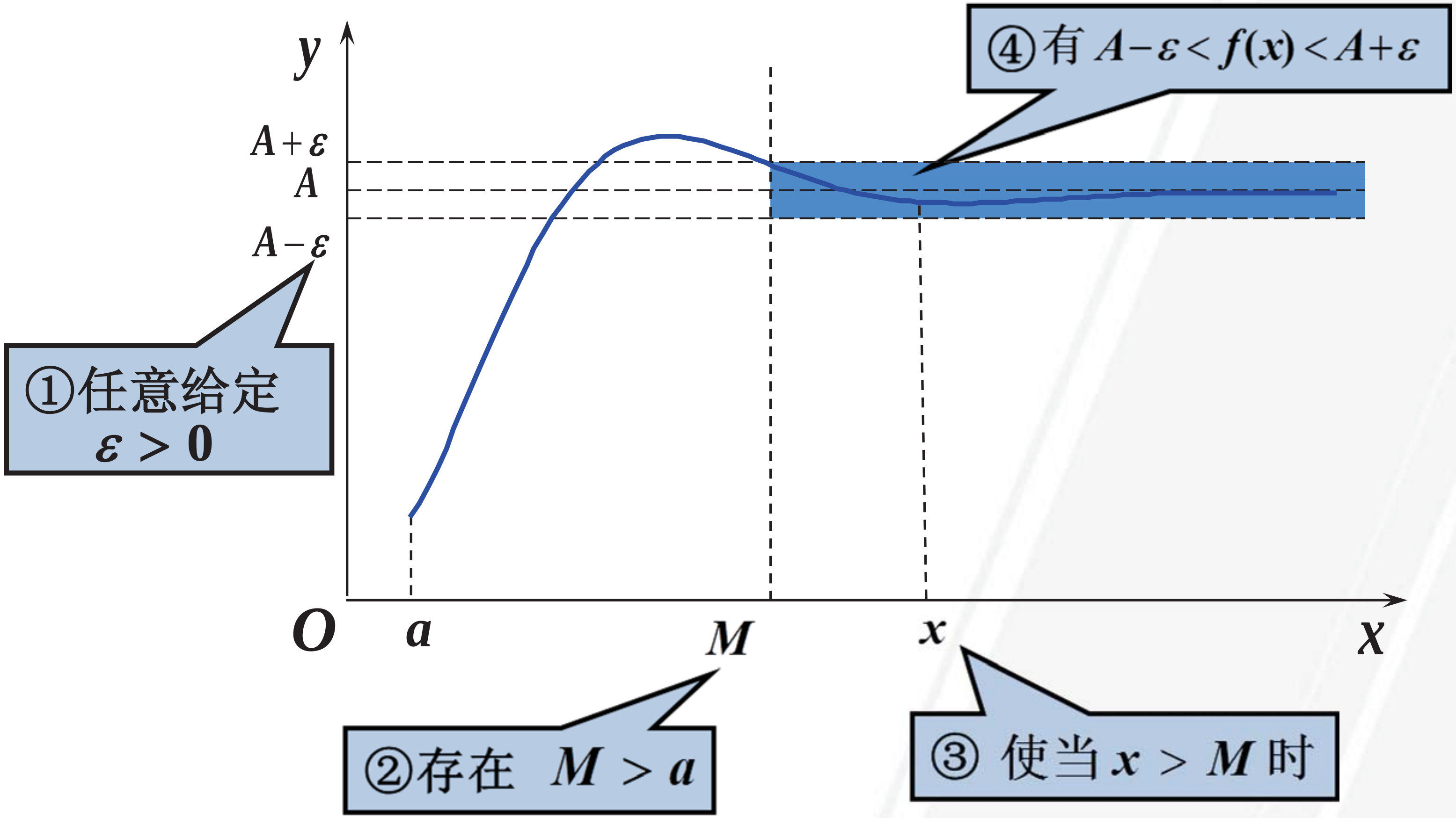
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad 或者 \quad f(x)\to A \ \ (x\to+\infty).$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 的几何意义



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的几何意义

ε更小



注 数列可视为定义在正整数集上的函数. 请大家比较数列极限定义与函数极限定义之间的相同点与不同点.

例1 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

证 任给 $\varepsilon>0$, 取 $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 当 $x>M$ 时,

$$|f(x)-0|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon,$$

所以(由定义1),

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

例2 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}.$

证 任给 $\varepsilon>0\ (\varepsilon<\dfrac{\pi}{2})$，取 $M=\tan(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon)$.

因为 $\arctan x$ 严格增，当 $x>M$ 时，

$$\left|f(x)-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}-\arctan x$$

$$<\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)=\varepsilon.$$

这就是说 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}.$