第二讲

拉格朗日定理及推论

拉格朗日定理

定理6.2（拉格朗日中值定理）

设函数 $f(x)$ 满足：

(i) $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续；

(ii) $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导.

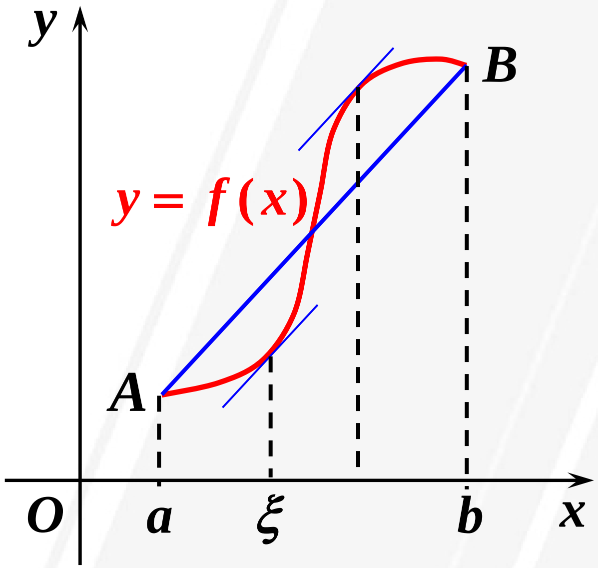
那么在开区间 (a,b) 内（至少）存在一点 ξ, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

注 当 $f(a)=f(b)$ 时，拉格朗日定理就是罗尔定理，可见，罗尔定理是拉格朗日定理的一个特例.

几何意义 如右图，曲线 $y=f(x)$ 的两个端点 A, B 连线的斜率为

$$k_{AB}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



用平行推移的方法，曲线上至少在一点 $(\xi, f(\xi))$ 处的切线与 AB 平行，其斜率 $f'(\xi)$ 也等于 k_{AB}.

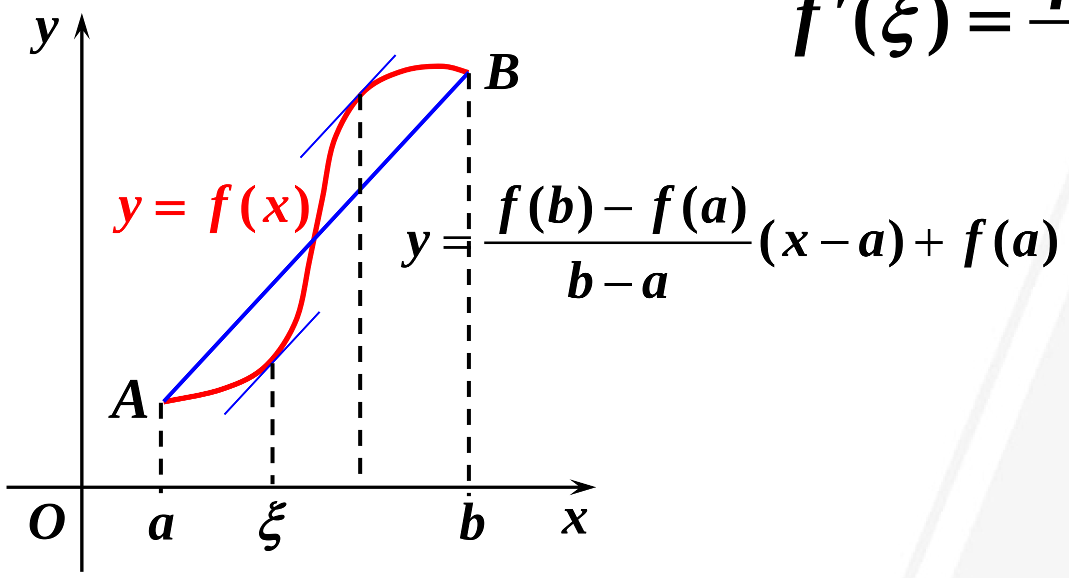
定理的证明 设

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$$

可以验证$F(x)$满足罗尔定理的三个条件，所以

$\exists\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

拉格朗日中值定理的结论 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$,

通常称为拉格朗日中值公式.

拉格朗日公式有几个等价的表示形式:

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ a<\xi<b.$$

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),\ 0<\theta<1.$$

$$f(x+h)-f(x)=f'(x+\theta h)h,\ 0<\theta<1.$$

另外，拉格朗日公式对$b<a$ 仍然成立，此时ξ 是介于a与b之间的一个常数.

中值定理是一种纯粹的“存在性”定理，我们只知道ξ的存在，但不知道ξ究竟在区间的什么地方.

连续函数介值性定理也是这样的存在性定理.

存在性定理虽然只给出了某种现象的存在，但仍然具有重要的科学理论价值.

唐朝诗人贾岛的诗句

“松下问童子，言师采药去；云深不知处，只在此山中”

在人文意境上给出了存在性定理非常生动的描述.

推论1

设 $f(x)$ 在区间 I 上的导函数 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)$ 在 I 上是一个常值函数.

证 对于区间 I 上的任何两点 x_1 与 x_2, $x_1 < x_2$，$f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上满足拉格朗日定理的条件, 则有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0,\quad \xi\in(x_1,x_2).$$

这就是说, $f(x)$ 在区间 I 上的任何两个值都相等, 所以为常值函数.

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ a<\xi<b.$$

推论2

若函数 f 和 g 均在区间 I 上可导，且

$$f'(x) \equiv g'(x),\ x \in I,$$

则在区间 I 上 $f(x)$ 与 $g(x)$ 只差某一常数，即

$$f(x) = g(x) + c \quad (c\text{ 为某一常数}).$$

推论3（导数极限定理）

设函数 f 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内连续，在 $U^{\circ}(x_0)$ 内可导，且极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = k$ 存在，则 f 在点 x_0 可导，且

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x).$$

证 分别按左右极限来证明.

(1) 任取 $x \in U_+^\circ(x_0)$, $f(x)$ 在 $[x_0, x]$ 上满足拉格朗日定理条件，则存在 $\xi \in (x_0, x)$, 使得

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi).$$

由于 $x_0 < \xi < x$, 因此当 $x \to x_0^+$ 时，随之有 $\xi \to x_0^+$, 对上式两边求极限，便得

$$f_+'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} f'(\xi) = f'(x_0 + 0).$$

(2) 同理可得 $f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0)$.

因为 $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = k$, 所以 $f'_+(x_0 + 0) = f'_-(x_0 - 0) = k$,

从而 $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = k$, 即 $f'(x_0) = k$.