第四讲

数列的性质 2

定理2.7（四则运算法则）

若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$为收敛数列则$\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$, $\{a_n\cdot b_n\}$也都是收敛数列, 且有

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，当$b_n$为常数$c$时,

$\lim\limits_{n\to\infty}cb_n=c\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;

(3) 若$b_n\neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$，则$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$也收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

证 (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N,

当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$, $|b_n - b| < \varepsilon$ 同时成立,

所以

$$|a_n \pm b_n - (a \pm b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon,$$

由 ε 的任意性, 得到

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n .$$

(2) 因 $\{b_n\}$ 收敛，故 $\{b_n\}$ 有界，设 $|b_n| \le M$.

对于任意 $\varepsilon > 0$，当 $n > N$ 时，有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{M+1}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{|a|+1},$$

于是 $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab|$

$$\le |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|$$

$$< 2\varepsilon,$$

由 ε 的任意性，证得

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = a\ b = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n .$$

(3) 因为 $\dfrac{a_n}{b_n}=a_n\cdot\dfrac{1}{b_n}$, 由(2), 只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

这也就是要证，$\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, $\forall n>N$,

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\left|\frac{b_n-b}{b_nb}\right|<\varepsilon.$$

这里只估计 $|b_n|$ 的下界即可.

证 (3) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 由于 $b \neq 0$,

据保号性, $\exists\ N_1 > 0$, 当$n > N_1$时,

$$|b_n| > \frac{|b|}{2}.$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ N_2 > 0$, 当 $n > N_2$ 时,

$$|b_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\varepsilon,$$

取 $N=\max\{N_1, N_2\}$，当 $n>N$，

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\left|\frac{b_n-b}{b_nb}\right|<\frac{2}{|b|^2}|b_n-b|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$.

$$\frac{1}{|b_n|}<\frac{2}{|b|},\quad |b_n-b|<\frac{|b|^2}{2}\varepsilon.$$

例1 用四则运算法则计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0},$$

其中 $m \le k$, $a_m b_k \ne 0$.

解 依据 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0\ (\alpha>0)$, 分别得出:

(1) 当 $m=k$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_m+a_{m-1}\frac{1}{n}+\cdots+a_1\frac{1}{n^{m-1}}+a_0\frac{1}{n^m}}{b_m+b_{m-1}\frac{1}{n}+\cdots+b_1\frac{1}{n^{m-1}}+b_0\frac{1}{n^m}}=\frac{a_m}{b_m}.$$

(2) 当 $m<k$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_mn^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1n+a_0}{b_kn^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1n+b_0}=0,$$

所以

$$\text{原式}=\begin{cases}\dfrac{a_m}{b_m}, & m=k,\\ 0, & m<k.\end{cases}$$

例2 设 $a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

证 由于$a_n \geq 0$, 根据极限的保不等式性, 有 $a \geq 0$.

对于任意$\varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon^2$. 于是可得:

(1) $a = 0$ 时, 有 $|\sqrt{a_n} - 0| = \sqrt{a_n} < \varepsilon$;

(2) $a > 0$ 时, 有

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}} .$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ 得证.

例3 设 $a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$，据极限的保号性, 存在$N$,

当 $n>N$ 时, 有 $\dfrac{a}{2} < a_n < \dfrac{3a}{2}$, 即

$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3a}{2}}.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{a}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3a}{2}} = 1$, 所以由极限的迫敛性, 证得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

例4 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}\ (a\neq -1)$.

解 (1) $|a|<1$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$，所以由极限四则运算法则，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a^n}{1+\lim\limits_{n\to\infty}a^n}=0.$$

(2) $a=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}.$

(3) $|a|>1$，因 $\lim\limits_{n\to\infty}(1/a^n)=0$，故得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/a^n}=\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}(1/a^n)}=1.$$

例5 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 m 个正数, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

证 设 $a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$. 由

$$a \le \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \le \sqrt[n]{m}\, a,$$

与

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}\, a = \lim_{n\to\infty} a = a,$$

以及极限的迫敛性, 得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

定义1

设$\{a_n\}$为数列，$\{n_k\}$为$\mathbf{N}_+$的无限子集,且

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots,$$

则数列 $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$

称为$\{a_n\}$的子列，简记为$\{a_{n_k}\}$.

注 由定义,$\{a_n\}$的子列$\{a_{n_k}\}$的各项均选自$\{a_n\}$,且保持这些项在$\{a_n\}$中的先后次序. $\{a_{n_k}\}$中的第k项是$\{a_n\}$中的第n_k项，故总有$n_k \ge k$.

例如 $\{a_{2n}\},\{a_{2n-1}\}$均是$\{a_n\}$的子列.

定理2.8

数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是$\{a_n\}$的任意子列$\{a_{n_k}\}$都收敛(且相等).

证（充分性） 因为$\{a_n\}$也是本身的一个子列，所以充分性显然成立.

（必要性） 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 则$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当$n > N$时, $|a_n - a| < \varepsilon$. 设$\{a_{n_k}\}$是$\{a_n\}$的任意一个子列. 因 $n_k \geq k$, 故$k > N$ 时, $n_k \geq k > N$, 也有 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. 这就证明了

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

注 由定理 2.8 可知，若一个数列的两个子列收敛于不同的值，则此数列必发散.

例6 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a.$

证（必要性) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\forall \varepsilon > 0$， $\exists N, n > N$ 时，

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

因为 $2n > N, 2n-1 \geq N$，所以

$$|a_{2n-1} - a| < \varepsilon,\quad |a_{2n} - a| < \varepsilon.$$

(充分性) 设 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a$，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists K$,

当 $k > K$ 时，$|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$，$|a_{2k} - a| < \varepsilon$.

令 $N = 2K$，当 $n > N$ 时，有 $|a_n - a| < \varepsilon$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

例7 若 $a_n=(-1)^n(1-\frac{1}{n})$. 证明数列 $\{a_n\}$ 发散.

证 显然

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} -(1-\frac{1}{2k-1}) = -1;$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} (1-\frac{1}{2k}) = 1.$$

因此，数列 $\{a_n\}$ 发散.