第六讲

柯西中值定理

数学分析　第六章
微分中值定理及其应用

§2 柯西中值定理和不定式极限

柯西中值定理是比拉格朗日定理更一般的中值定理，本节用它来解决求不定式极限的问题.

一、柯西中值定理

二、不定式极限

*点击以上标题可直接前往对应内容

柯西中值定理

定理6.6（柯西中值定理）

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上满足:

(i) $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(ii) $f(x), g(x)$ 在开区间 (a, b) 上可导;

(iii) $f'^2(x)+g'^2(x)>0$;

(iv) $g(a) \neq g(b)$.

则在开区间 (a, b) 内必定 (至少) 存在一点 ξ, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

几何意义

首先将 f，g 这两个函数视为以 x 为参数的方程

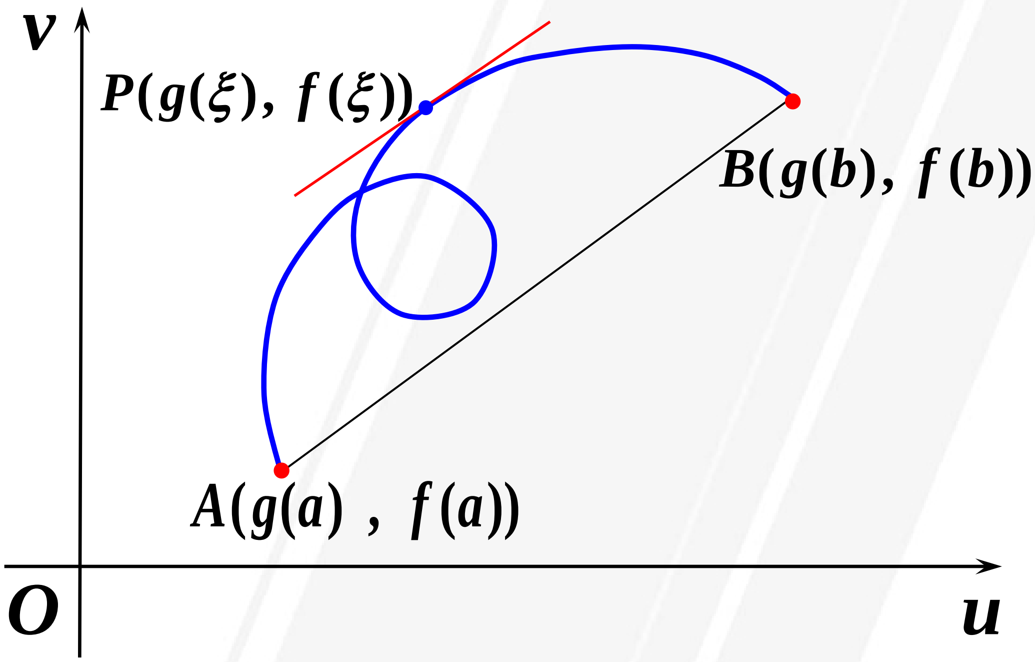
$$u=g(x),\quad v=f(x).$$

它在 O- uv 平面上表示一段曲线. 由拉格朗日定理的几何意义，存在一点 (对应于参数) ξ 的导数

$$\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right|_{x=\xi}$$

恰好等于曲线端点弦 AB 的斜率:

$$k_{AB}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$



证 作辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

显然, $F(x)$满足罗尔定理的条件, 所以存在点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0.$$

可以肯定$g'(\xi)\neq 0$ (否则 $f'(\xi)$ 也为零, 与条件 (iii) 矛盾),

所以
$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

例1 设函数 f 在区间 $[a, b](a > 0)$ 上连续, 在(a, b) 上可导, 则存在$\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}.$$

分析 所证式子可变形为 $\dfrac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \dfrac{f'(\xi)}{1/\xi}$.

证 设 $g(x) = \ln x$, 显然 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足柯西中值定理的条件, 于是存在$\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \frac{f'(\xi)}{1/\xi},$$

变形后即得所需的等式.

例2 设 f 在区间 $(0,1]$ 上可导，$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,f'(x)=A$

则 f 在 $(0,1]$ 上一致连续.

分析 由条件，f 在区间 $[\delta_1,1],\ \delta_1>0$ 上一致连续，

所以，只须证明 f 在区间 $(0,\delta_1],\ \delta_1>0$ 上一致连续.

证 设 $M=|A|+1$，因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,f'(x)=A$，

$\exists\delta_1\ (0<\delta_1<1)$，当 $0<x<\delta_1$ 时，$\left|\sqrt{x}\,f'(x)\right|\le M$.

在 $[x,y]\subset(0,\delta_1]$ 上，对 $\sqrt{x}$ 和 $f(x)$ 运用柯西中值定理，

$\exists\xi\in(x,y)$，

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right|=2\left|\sqrt{\xi}\,f'(\xi)\right|\le 2M.$$

于是得

$$|f(x)-f(y)|\le 2M\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|.$$

$\sqrt{x}$在$[0,\delta_1]$上一致连续，从而 f 在 $(0,\delta_1]$上一致连续.

又 f 在$[\delta_1,1]$上一致连续，因此 f 在 $(0,1]$上一致连续.

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right|\le 2M.$$