第六讲

一致连续性

一致连续性

在本段中，我们将介绍一致连续性这个及其重要的概念.

定义2

设 $f(x)$ 为定义在区间I上的函数, 如果对于任意的正数$\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $x_1, x_2 \in I$, 只要$|x_1 - x_2| < \delta$, 就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在区间I上一致连续.

例1 证明 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续 .

证 因为对任意的 $x_1, x_2 \in [1,+\infty)$, 有

$$\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right| = \frac{|x_2-x_1|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}} \le |x_2-x_1|,$$

所以对任意的正数 $\varepsilon>0$, 只要取 $\delta=\varepsilon$,

当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}| \le |x_2-x_1| < \varepsilon,$$

所以 $\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

例2 证明 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内不一致连续.

证 首先我们根据一致连续的定义来叙述 $f(x)$ 在区间 I 上不一致连续的定义：

存在 $\varepsilon_0>0$, 对任意正数 δ (无论 δ 多么小), 总存在 $x_1,x_2\in I$, 虽然 $|x_1-x_2|<\delta$, 但仍有

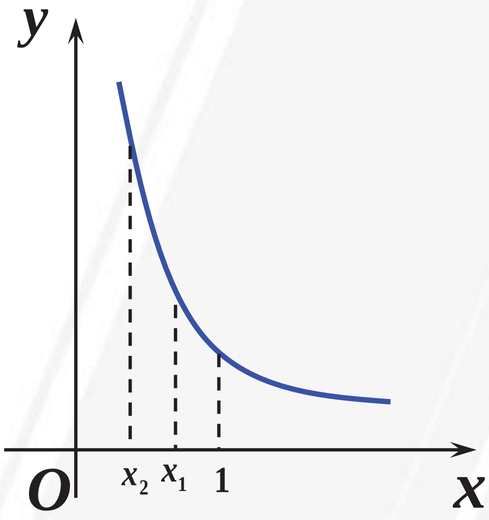
$$|f(x_1)-f(x_2)|\ge\varepsilon_0.$$

现在来验证函数 $y=\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,1)$ 确实不是一致连续的.

取 $\varepsilon_0 = 1$, 对任意正数 $\delta\ (\delta < \frac{1}{2})$

令 $x_1 = \delta,\ x_2 = \frac{\delta}{2}$, 虽 $|x_1 - x_2| < \delta$,

但 $\left|\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right| = \frac{1}{\delta} > 1.$



这就说明 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内不一致连续.

试问, 函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续与 $f(x)$ 在区间 I 上连续的区别究竟在哪里?

答: (1) 首先, 对于 $\varepsilon > 0$, 如果 $f(x)$在区间 I上连续, 那么, δ 不仅与ε有关, 而且还与所讨论的点 x_0有关, 即 $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$. 而 $f(x)$ 在区间I上一致连续, 则 δ 仅与 ε 有关.

比如 $y = \dfrac{1}{x}$在 $x_0 \in (0,1)$连续, 对于任意正数ε, 所得

$$\delta = \min\left\{\frac{2\varepsilon}{x_0^2}, \left|\frac{x_0}{2}\right|\right\}$$

, 显然它与ε, x_0都有关. 在例8中已证得 $y = \sqrt{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续. 这是由于 $\varepsilon = \delta$, δ与 x_0无关.

(2) 函数 $f(x)$ 在每一点 $x_0 \in I$ 连续, $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

若 $\delta(\varepsilon, x_0)$ 在 x_0 的变化过程中有一个正下界(当然这个下界只与 ε 有关, 而与 x_0 无关), 则此时 $f(x)$ 在区间 I 上就一致连续了.

下述定理是连续函数在闭区间上的又一整体性质.

定理4.9

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$上连续， 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$上一致连续.

这个定理告诉我们：定义在闭区间上的函数， 连续和一致连续是等价的.

证 首先用致密性定理来证明该定理. 在下述证明过程中， 选子列的方法值得大家仔细探究.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不一致连续, 即存在$\varepsilon_0>0$, 对于一切 $\delta>0$ (无论 δ 多么小), 总是存在 $x', x''\in[a,b]$, 虽然 $|x'-x''|<\delta$, 但

$$|f(x')-f(x'')|\ge\varepsilon_0.$$

现分别取

$$\delta = 1, \quad \exists\, x_1', x_1'' \in [a, b], \quad |x_1' - x_1''| < 1,$$

$$|f(x_1') - f(x_1'')| \geq \varepsilon_0\ ;$$

$$\delta = \frac{1}{2}, \quad |x_2' - x_2''| < \frac{1}{2}, \quad \exists\, x_2', x_2'' \in [a, b],$$

$$|f(x_2') - f(x_2'')| \geq \varepsilon_0\ ; \quad \cdots\cdots,$$

$$\delta_n = \frac{1}{n}, \quad \exists\, x_n', x_n'' \in [a, b], \quad |x_n' - x_n''| < \frac{1}{n},$$

$$|f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon_0\ ; \quad \cdots\cdots.$$

由此得到两列 $\{x_n'\}, \{x_n''\} \subset [a, b]$, 虽然

$$|x_n' - x_n''| < \frac{1}{n} \to 0,$$

但是总有

$$|f(x_n')-f(x_n'')|\geq\varepsilon_0.$$

因为 $\{x'_n\}$ 有界，从而由致密性定理，存在 $\{x'_n\}$ 的一个收敛子列 $\{x'_{n_k}\}$. 设 $\lim\limits_{k\to\infty}x'_{n_k}=x_0$.

因为 $a\leq x'_{n_k}\leq b$, 所以由极限的不等式性质

$$a\leq x_0\leq b.$$

因为 $\lim\limits_{k\to\infty}x''_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}(x''_{n_k}-x'_{n_k})+\lim\limits_{k\to\infty}x'_{n_k}=x_0$, 以及 f 连续，所以由归结原则得到

$$\varepsilon_0\leq\lim_{k\to\infty}|f(x'_{n_k})-f(x''_{n_k})|=|\lim_{x\to x_0}f(x)-\lim_{x\to x_0}f(x)|=0,$$

矛盾.

例3 设区间 I_1 的右端点为 $c \in I_1$, 区间 I_2 的左端点也为 c, 并且 $c \in I_2$. 证明：若 $f(x)$ 分别在 I_1, I_2 上一致连续, 则 $f(x)$ 在区间 $I_1 \cup I_2$ 上也一致连续.

证 对任意的 $\varepsilon > 0$, 因为 $f(x)$ 在 I_1, I_2 上一致连续, 所以分别存在 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, 使得

当 $x_1, x_2 \in I_1$, $|x_1 - x_2| < \delta_1$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$,

当 $x_1, x_2 \in I_2$, $|x_1 - x_2| < \delta_2$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$,

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, 则对于任意的 $x_1, x_2 \in I_1 \cup I_2$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有以下两种情形:

情形1. $x_1, x_2 \in I_1$ 或 $x, x_2 \in I_2$. 此时自然有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

情形2. $x_1 \in I_1,\ x_2 \in I_2$. 注意到

$$c \in I_1 \cap I_2, |x_1 - c| < \delta, |x_2 - c| < \delta,$$

可得

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - f(c)| + |f(x_2) - f(c)|$$

$$\le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

综上，证得 $f(x)$ 在区间 $I_1 \cup I_2$ 上一致连续.

注 例3.的条件 “$c \in I_1 \cap I_2$” 是重要的. 比如

$$f(x)=\begin{cases}1, & 1 \le x \le 2,\\ 0, & 2 < x \le 3\end{cases}$$

在区间 $[1,2]$ 与区间 $(2,3]$ 上分别一致连续, 但在区间 $[1,3]$ 上不连续, 当然也不一致连续.

·一致连续的一个充要条件

命题 函数 f 在区间 I 上一致连续 $\Longleftrightarrow$

$\forall \{x_n\},\{y_n\}\subset I$, 只要 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$,

就有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n) - f(y_n)\right) = 0.$

证明 （必要性）设 f 在区间 I 上一致连续，则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x', x'' \in I$, 当 $|x' - x''| < \delta$,

$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$

对 I 上两个数列 $\{x_n\},\{y_n\}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$,

对上述δ， $\exists N>0, \forall n>N$， 有 $|x_n-y_n|<\delta$,

所以 $|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon.$ 由定义,

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x_n)-f(y_n)\right)=0.$$

（充分性） 假设 f 在 I上非一致连续, $\exists\varepsilon_0>0$,

对于 $\forall\delta>0$, $\exists x', x''\in I$, 虽然 $|x'-x''|<\delta$,

但是 $|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0.$

取$\delta = 1, \exists x_1, y_1 \in I, |x_1 - y_1| < 1, \ |f(x_1) - f(y_1)| \geq \varepsilon_0.$

取$\delta = \frac{1}{2}, \exists x_2, y_2 \in I, |x_2 - y_2| < \frac{1}{2}, |f(x_2) - f(y_2)| \geq \varepsilon_0.$

……

取$\delta = \frac{1}{n}, \exists x_n, y_n \in I, |x_n - y_n| < \frac{1}{n}, |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$

……

得到I上两数列$\{x_n\}, \{y_n\}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0,$

但是$\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n) - f(y_n)\right) \neq 0.$ 假设不成立，

充分性得证.

例 4. 求证 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上非一致连续.

证明 分别取 $x_n=\dfrac{1}{\pi/2+2n\pi}$, $y_n=\dfrac{1}{2n\pi}$, $n=1,2,\dots$

则

$$x_n-y_n=\frac{1}{\pi/2+2n\pi}-\frac{1}{2n\pi}\to 0,\quad (n\to\infty).$$

而

$$f(x_n)-f(y_n)=\sin(\pi/2+2n\pi)-\sin(2n\pi)=1.$$

由命题， f 在 $(0,1)$ 上非一致连续.