第四讲

数列极限的存在

单调有界定理

数列 $\{a_n\}$ 单调、有界， 则 $\{a_n\}$ 收敛，且

- 若 $\{a_n\}$ 单调递增、有界，有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$，

  所以 $a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $n = 1, 2, \ldots$

- 若 $\{a_n\}$ 单调递减、有界，有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$，

  所以 $a_n \ge \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $n = 1, 2, \ldots$

数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$单调递增、有界，且$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$单调递减、有界，且$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$

故

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

推得

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

例 1. 设

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ 存在.

证明 由

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) < 0,$$

有

$$c_{n+1} < c_n.$$

由

$$\frac{1}{k+1}<\ln\left(1+\tfrac{1}{k}\right)<\frac{1}{k}$$

令 $k=1,2,\cdots,n-1$ ，然后相加，得到

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$

故

$$\ln(n+1)-\ln n<c_n,$$

由单调有界定理 $\{c_n\}$ 收敛.

注 其中 $\{c_n\}$的极限称为欧拉常数，即

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c = 0.5772156649\cdots$$

由此

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n + c + \varepsilon_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} c_{2n} = c$$

故

$$0 = \lim_{n\to\infty}\left(c_{2n} - c_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln 2\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2.$$

数列子列

性质 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是 $\{a_n\}$ 的任何子列均收敛并极限值均相等.

利用上述性质，我们可以判别一些数列的发散性.

例 2. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{n\pi}{4}$ 不存在.

证明 设

$$a_n=\sin\frac{n\pi}{4}$$

则 $a_{8n}=0$ $a_{8n+2}=1$

故 $\{a_n\}$ 有两个子列趋于不同值,

说明该数列的发散.

例 3. 设数列 $\{a_n\}$ 无界，证明存在子列 $\{a_{n_k}\}$ 有

$$\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = \infty.$$

证明 数列 $\{a_n\}$ 无界的定义：

$$\forall M > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\quad |a_{n_0}| > M.$$

等价的有

$$\forall M > 0,\quad \forall N \in \mathbb{N},\quad \exists n_0 > N,\ |a_{n_0}| > M.$$

分别取

$$M=1,\ N=1,\ \exists n_1>1,\ |a_{n_1}|>1.$$

$$M=2,\ N=n_1,\ \exists n_2>n_1,\ |a_{n_2}|>2.$$

$$\cdots\cdots$$

$$M=k,\ N=n_{k-1},\ \exists n_k>n_{k-1},\ |a_{n_k}|>k.$$

得一子列 $\{a_{n_k}\}$，显然有

$$\lim_{n\to\infty} a_{n_k}=\infty.$$

致密性定理

有界数列必有收敛子列.

注 这个定理在数学分析后继课程中有着极为广泛的应用.

例 4. 设数列 $\{a_n\}$ 单调，存在收敛子列，

则 $\{a_n\}$ 收敛.

注 该例反映了单调数列的一个特点，下面用不同的方法证明. 不妨设 $\{a_n\}$ 单调递增， 且存在收敛子列

$$\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = a.$$

证法一

对任意自然数 k，因为 $k \le n_k$，所以

$$a_k \le a_{n_k}.$$

因此对任意自然数 j 有

$$a_k \le a_{n_{k+j}}.$$

令 $j \to \infty$，$a_k \le a$.

故 $\{a_n\}$ 有上界 a，据单调有界定理 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，显然极限也是 a.

证法二

因为 $\{a_n\}$ 单增，所以 $\{a_{n_k}\}$ 单增. 又

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \forall k \geq K,\quad a-\varepsilon < a_{n_k} < a+\varepsilon.$

取 $N = n_K$， $n > N$ 时，存在 $k_0 \geq n$ ，

$$n_{k_0} \leq n \leq n_{k_0+1}$$

由 $\{a_n\}$ 的递增性，有

$$a-\varepsilon < a_{n_{k_0}} \le a_n \le a_{n_{k_0+1}} < a+\varepsilon$$

则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

柯西收敛准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists N \in \mathbb{N},\quad \forall n, m > N,\quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

或者：

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists N \in \mathbb{N},\quad \forall n > N,\quad \forall p \in \mathbb{N},$$

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

例 5. 用柯西收敛准则证明 $\left\{(-1)^n\right\}$ 不收敛.

证明 取 $\varepsilon_0=1$，$\forall N\in\mathbb{N}$，取 $n_0=N$，$p=1$

则

$$\left|a_{n_0+1}-a_{n_0}\right|=\left|(-1)^{n_0+1}-(-1)^{n_0}\right|=2>1.$$

由柯西收敛准则，$\left\{(-1)^n\right\}$ 不收敛.