第六讲

致密性定理与柯西准则

例1 设 S 是有界数集.证明:若 $\sup S = a \notin S$,则存在严格单调增数列 $\{x_n\} \subset S$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

证 因 a 是 S 的上界, 故对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, x \in S$,使得 $x > a - \varepsilon$. 又因 $a \notin S$, 故 $x < a$, 从而有

$$a - \varepsilon < x < a.$$

现取 $\varepsilon_1 = 1$, 则 $\exists\, x_1 \in S$,使得

$$a - \varepsilon_1 < x_1 < a.$$

再取 $\varepsilon_2 = \min\{\frac{1}{2}, a - x_1\}$, 则 $\exists\, x_2 \in S$,使得

$$a - \varepsilon_1 < x_2 < a,$$

且有 $x_2 > a - \varepsilon_2 \geq a - (a - x_1) = x_1.$

一般地,按上述步骤得到 x_{n-1} 之后,取

$$\varepsilon_n = \min\{\frac{1}{n}, a - x_{n-1}\},$$

则存在 $x_n \in S$,使得

$$a - \varepsilon_n < x_n < a,$$

且有 $x_n > a - \varepsilon_n \ge a - (a - x_{n-1}) = x_{n-1}.$

于是得到数列 $\{x_n\} \subset S$, 它是严格单调增的, 满足

$$a - \varepsilon_n < x_n < a,$$

因此, $|x_n - a| < \varepsilon_n \le \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots.$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

例2 任何数列都存在单调子列.

证 设数列为 $\{a_n\}$, 下面分两种情行讨论:

1. 若对任何正整数 k, 数列 $\{a_{k+n}\}$ 有最大项. 设 $\{a_{1+n}\}$ 的最大项为 a_{n_1}. 因为 $\{a_{n_1+n}\}$ 亦有最大项, 设其最大项为 a_{n_2}. 显然有 $n_2 > n_1$, 且因为 $\{a_{n_1+n}\}$ 是 $\{a_{1+n}\}$ 的一个子列，故

$$a_{n_2} \le a_{n_1};$$

同理存在 $n_3 > n_2$, 使得

$$a_{n_3} \le a_{n_2};$$

$$\cdots\cdots$$

这样得到了一个单调递减的子列 $\{a_{n_k}\}$.

2.至少存在某个正整数k，数列$\{a_{k+n}\}$没有最大项.

先取$n_1=k+1$, 因为$\{a_{k+n}\}$没有最大项, 故a_{n_1}后面

总存在$a_{n_2}\,(n_2>n_1)$,使得

$$a_{n_2}>a_{n_1};$$

同理存在a_{n_2}后面的项a_{n_3}（$n_3>n_1$),使得

$$a_{n_3}>a_{n_2};$$

$$\cdots\cdots$$

这样得到了一个单调递增的子列$\{a_{n_k}\}$.

定理2.10（致密性定理）

任何有界数列必有收敛子列.

证 设数列$\{a_n\}$有界， 由例5可得有一个单调子列$\{a_{n_k}\}$.

显然$\{a_{n_k}\}$是有界的,再由单调有界定理推得$\{a_{n_k}\}$收敛.

定理2.11（柯西收敛准则）

数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是:
对于任意正数ε，存在 $N>0$， 当 $n,m>N$ 时，有

$$|a_n-a_m|<\varepsilon.$$

柯西准则的充要条件可用另一种形式表达为:

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，对任意 $p\in\mathbf{N}_+$，均有

$$|a_n-a_{n+p}|<\varepsilon.$$

满足上述条件的数列称为柯西列.

证（充分性）先证明数列有界. 取$\varepsilon_0=1$, 因为$\{a_n\}$是柯西列，所以存在N_0, $n>N_0$时有

$$\left|a_n-a_{N_0+1}\right|<1.$$

令$M=\max\left\{|a_1|,\cdots,|a_{N_0}|,|a_{N_0+1}|+1\right\}$,则对$\forall n$,有$|a_n|\le M$.

由致密性定理，$\{a_n\}$有收敛子列$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=\xi$. 由条件对任意$\varepsilon>0$, 存在$N$，当$n$，$m>N$时 有$|a_n-a_m|<\varepsilon$.

在上式中取$a_m=a_{n_k}$，k充分大时，$n_k>N$，令$k\to\infty$

$$|a_n-\xi|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

即数列$\{a_n\}$收敛.

(必要性) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. 由极限定义, $\forall\varepsilon>0$,

$\exists N>0$, 当 $n,m>N$ (或 $n,m\ge N$)时，有

$$|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |a_m-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由此推得

$$|a_n-a_m|\le|a_n-A|+|a_m-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

例3 设 $0<\alpha\le 1$, $x_n=1+\dfrac{1}{2^{\alpha}}+\cdots+\dfrac{1}{n^{\alpha}}$, $n=1,2,\cdots$.

证明 $\{x_n\}$ 发散.

证 取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$, $\forall N>0$, $\exists n_0=N$, $m_0=2N$, 使得

$$\left|x_{n_0}-x_{m_0}\right|=\frac{1}{(N+1)^{\alpha}}+\frac{1}{(N+2)^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{(2N)^{\alpha}}$$

$$\ge\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\cdots+\frac{1}{2N}\ge\varepsilon_0.$$

由柯西收敛准则的否定陈述, $\{x_n\}$ 发散.