CH4 插 值 法

/* Interpolation */

§1 拉格朗日插值

§2 牛顿插值公式

§3 埃尔米特插值

§4 分段多项式插值

§5 三次样条插值

研究函数插值的必要性

实际问题中遇到的函数一般具有确定的函数关系，但其解析表达式可能:

（1）未知，但可以测得一些关键点处的函数值。

（2）已知，但表达式复杂不实用，常常需用一个简单的解析表达式来近似代替它。

具体要求

（1）在某个范围内能和原函数充分接近，有较好的近似效果。

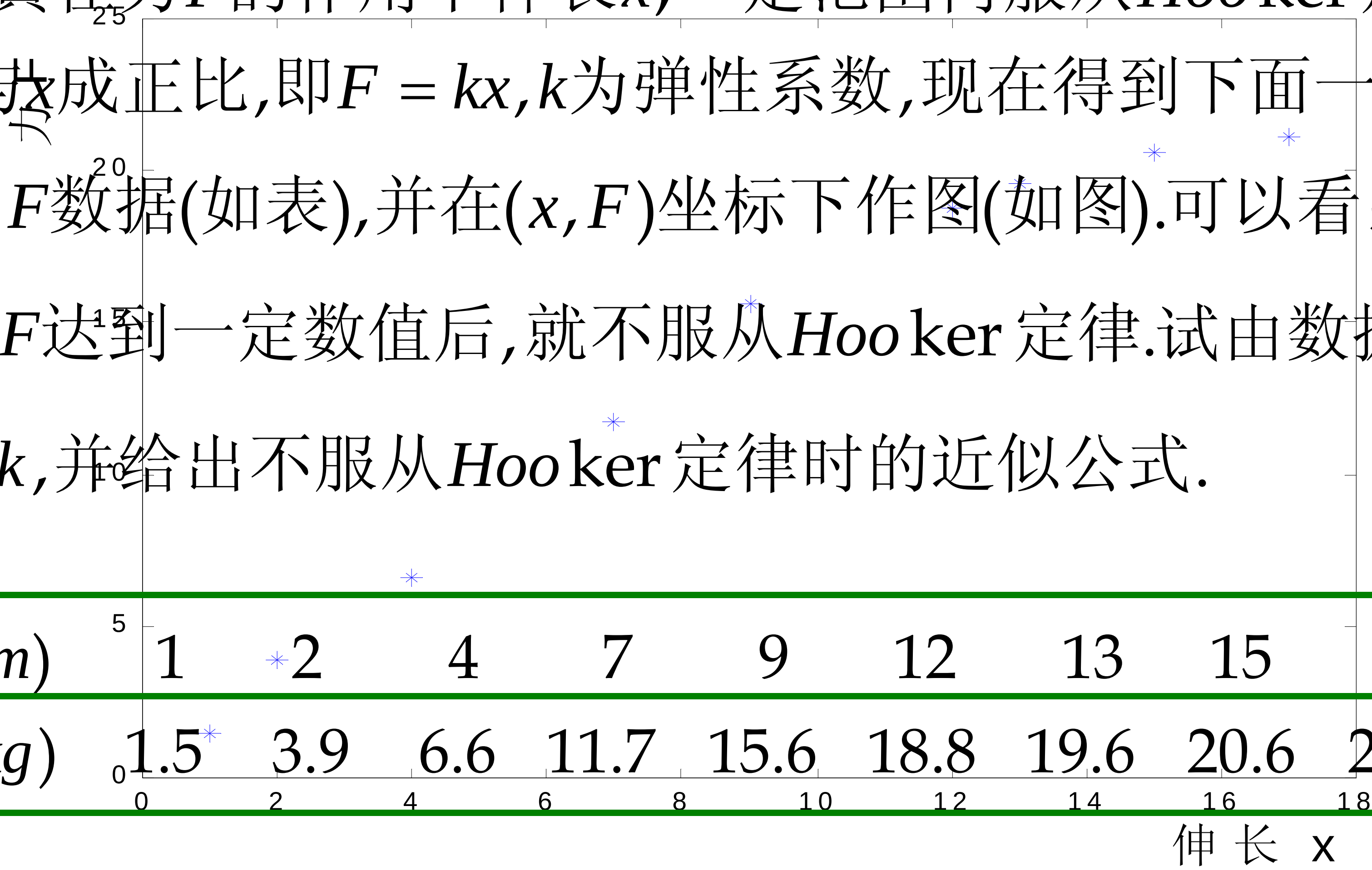
（2）具有一定的光滑性。

（3）表达式简单易用，比如：多项式，有理分式，三角函数中的正弦与余弦函数等等。

举例： Hooker定律

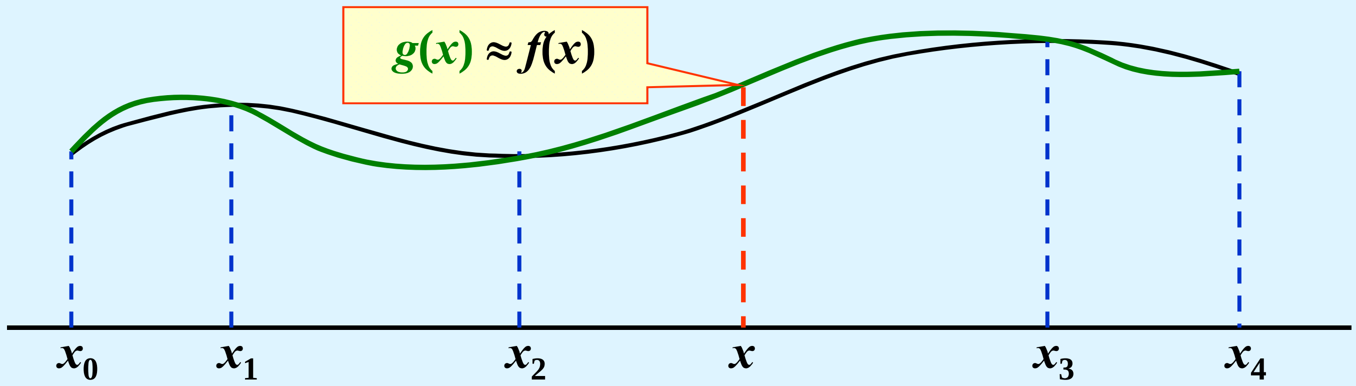
本章应用题： **Hooker定律**

弹簧在力F的作用下伸长x,一定范围内服从$Hoo\,\mathrm{ker}$定律：F与x成正比,即$F=kx$,k为弹性系数,现在得到下面一组x,F数据(如表),并在(x,F)坐标下作图(如图).可以看出，当F达到一定数值后,就不服从$Hoo\,\mathrm{ker}$定律.试由数据确定k,并给出不服从$Hoo\,\mathrm{ker}$定律时的近似公式.



$x(cm)$	1	2	4	7	9	12	13	15	17
$F(kg)$	1.5	3.9	6.6	11.7	15.6	18.8	19.6	20.6	21.1

当精确函数 $y = f(x)$ 非常复杂或未知时，在一系列节点 $x_0 \ldots x_n$ 处测得函数值 $y_0 = f(x_0), \ldots y_n = f(x_n)$，由此构造一个简单易算的近似函数 $g(x) \approx f(x)$，满足条件 $g(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0, \ldots n)$。这里的 $g(x)$ 称为 $f(x)$ 的插值函数。最常用的插值函数是 多项式



补充知识

根据线性空间的理论：

所有次数不超过n的多项式构成的线性空间是n+1维的，这个n+1维线性空间的基底也由n+1个多项式组成，且形式不是唯一的，而任意一个n次多项式可由基底线性表示，且在不同的基底下有不同的形式。

设$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$为上述$n+1$维线性空间的一个基底

显然$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$线性无关

且任意n次多项式$P_n(x)$可由$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$线性表示

$$P_n(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)$$

如果$P_n(x)$为某个函数$f(x)$的插值函数

则称$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$为插值基函数

§1 拉格朗日多项式 /* Lagrange Polynomial */

求 n 次多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 使得

$P_n(x_i)=y_i\,,\quad i=0,\ldots,n$

条件：无重合节点，即 $i\neq j \Longrightarrow x_i\neq x_j$

$n=1$ 使得

称为拉氏基函数 /* Lagrange Basis */，

满足条件 $l_i(x_j)=\delta_{ij}$ /* Kronecker Delta */

可见 $P_1(x)$ 是过 $(x_0, y$ $y_1)$ 两点的直线。

$$P_1(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

$$=\underbrace{\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)}_{l_0(x)}y_0+\underbrace{\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)}_{l_1(x)}y_1=\sum_{i=0}^{1}l_i(x)y_i$$

$n \geq 1$

希望找到$l_i(x)$，$i=0, \dots, n$ 使得 $l_i(x_j)=\delta_{ij}$；然后令

$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)\, y_i$，则显然有$P_n(x_i)=y_i$。

$l_i(x)$

每个 l 有 … $\dots, x$

l_i …)

$l_i(x_i)=1$ … $C_i=\prod_{j\neq i}\frac{1}{(x_i-x_j)}$

与 节点 有关，而与 f 无关

Lagrange Polynomial

$$l_i(x)=\prod_{\substack{j\neq i\\ j=0}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)\, y_i$$

定 理 (唯一性) 满足 $P(x_i) = y_i$， $i = 0, \ldots, n$ 的 n 阶插值多项式是唯一存在的。

证明：书72页 用Vandermonde行列式证明

反证：若不唯一，则除了 $P_n(x)$ 外还有另一 n 阶多项式 $L_n(x)$ 满足 $L_n(x_i) = y_i$ 。

考察 $Q_n(x) = P_n(x) - L_n(x)$，则 Q_n 的阶数 $\leq n$

而 Q_n 有 $n+1$ 个不同的根 $x_0 \ldots x_n$

∎

注：若不将多项式次数限制为 n，则插值多项式不唯一。

例如 $L(x) = P_n(x) + p(x)\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ 也是一个插值多项式，其中 $p(x)$ 可以是任意多项式。

常用的低阶公式

(1) 当 $n=1$时，即已知两点

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

则**Lagrange线性插值多项式**为

$$P_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$$

即 $$P_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

(2) 当 n=2时，即已知三点

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

则Lagrange抛物插值(二次插值)多项式为

$$P_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

即 $$P_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

例1　已知$f(x)$满足$f(144)=12, f(169)=13, f(225)=15$

作$f(x)$的二次Lagrange插值多项式,并求$f(175)$的近似值.

解

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-169)(x-225)}{2025}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-144)(x-225)}{-1400}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-144)(x-169)}{4536}$$

因此$f(x)$的二次Lagrange插值多项式为

$$P_2(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)$$

且　$f(175)\approx P_2(175)$

$$=12l_0(175)+13l_1(175)+15l_2(175)$$

$$=13.230\,158\,73$$

例2 用Lagrange线性插值多项式求例1中的$f(175)$.

解 由于插值点$x=175$在$x_1=169$与$x_2=225$之间

因此取$x_1=169$与$x_2=225$为插值节点

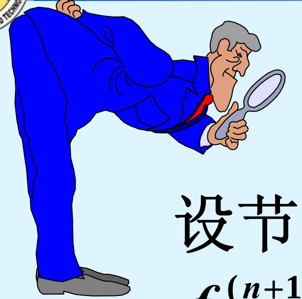
Lagrange插值基函数为

$$l_1(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{x-225}{-56}\qquad l_2(x)=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{x-169}{56}$$

$\therefore$ Lagrange线性插值多项式为

$$P_1(x)=y_1l_1(x)+y_2l_2(x)=13\cdot\frac{x-225}{-56}+15\cdot\frac{x-169}{56}$$

$$\therefore f(175)\approx 13\cdot\frac{175-225}{-56}+15\cdot\frac{175-169}{56}=13.214\,285\,71$$



➢ 插值余项 /* Remainder */

设节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，且 f 满足条件 $f \in C^n[a,b]$，$f^{(n+1)}$ 在 $[a\,,b]$ 内存在，考察截断误差 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

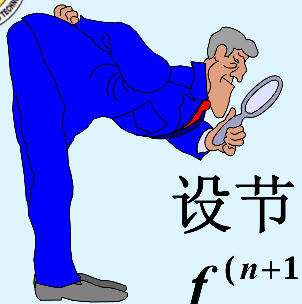
Rolle's Theorem：若 $\varphi(x)$ 充分光滑，$\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$，则存在 $\xi \in (x_0, x_1)$ 使得 $\varphi'(\xi) = 0$。

推广：若 $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0 \Rightarrow \xi_0 \in (x_0, x_1),\ \xi_1 \in (x_1, x_2)$

使得 $\varphi'(\xi_0) = \varphi'(\xi_1) = 0 \Rightarrow \xi \in (\xi_0, \xi_1)$ 使得 $\varphi''(\xi) = 0$

若 $\varphi(x_0) = \cdots = \varphi(x_n) = 0$

$\Rightarrow$ 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$



➢ 插值余项 /* Remainder */

设节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，且 f 满足条件 $f \in C^n[a,b]$，$f^{(n+1)}$ 在 $[a, b]$ 内存在，考察截断误差 $\boxed{R_n(x) = f(x) - P_n(x)}$

$R_n(x)$ 至少有 $n+1$ 个根 $\longrightarrow$ $R_n(x) = K(x)\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$

任意固定 $x \ne x_i$ $(i = 0, \ldots, n)$，考察 $\varphi(t) = R_n(t) - K(x)\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$

$\varphi(t)$ 有 $n+2$ 个不同的根 $x_0 \ldots x_n\ x$ $\longrightarrow$ $\varphi^{(n+1)}(\xi_x) = 0,\quad \xi_x \in (a, b)$

$$\varphi^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - \cancel{P_n^{(n+1)}(\xi_x)} - K(x)(n+1)! = R_n^{(n+1)}(\xi_x) - K(x)(n+1)!$$

$$\longrightarrow \quad K(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

注：☞ 通常不能确定 ξ_x，而是估计 $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M_{n+1}$, $\forall x \in (a,b)$

将 $\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}|x-x_i|$ 作为误差估计上限。

☞当 $f(x)$ 为任一个次数 $\le n$ 的多项式时，$f^{(n+1)}(x) \equiv 0$，可知 $R_n(x) \equiv 0$，即插值多项式对于次数 $\le n$ 的多项式是精确的。

例3 若$f(x)=\sqrt{x}$,三个插值节点为144,169,225,

试估计用Lagrange线性和二次插值做$f(175)$近似值的截断误差.

解 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad f''(x)=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ $\quad f'''(x)=\dfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$

$$R_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-169)(x-225)$$

$$R_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{2}(x-144)(x-169)(x-225)$$

$$\therefore |R_1(175)|=\left|\frac{f''(\xi)}{2}(175-169)(175-225)\right|=\frac{300}{2}\left|f''(\xi)\right|=150\left|f''(\xi)\right|$$

$$\left|f''(\xi)\right|=\frac{1}{4}\xi^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{4\xi\sqrt{\xi}}\le\frac{1}{4*169*13}$$

$$|R_1(175)|\le\frac{150}{4*169*13}=0.01706873008648$$

$$|R_2(175)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{6}(175-144)(175-169)(175-225)\right|$$

$$= \frac{9300}{2}\left|f'''(\xi)\right| = 4650\left|f'''(\xi)\right|$$

$$\left|f'''(\xi)\right| = \frac{3}{8}\xi^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8\xi^2\sqrt{\xi}} \le \frac{3}{8*144^2*12}$$

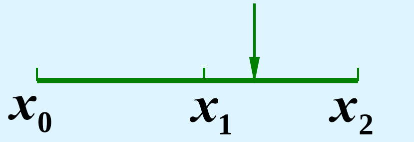
$$\therefore |R_2(175)| \le \frac{4650*3}{8*144^2*12} = 0.00700774016204$$

注：利用matlab的函数sqrt(175)，得

```
>> format long
>> sqrt(175)
ans =  13.22875655532295
```

例：已知 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,分别利用 $\sin x$ 的 1次、2次 Lagrange 插值计算 sin 50°, 并估计误差。

$50^0=\frac{5\pi}{18}$



解：$n=1$ 分别利用x_0, x_1 以及 x_1, x_2 计算

⊕利用 $x_0=\frac{\pi}{6}$, $x_1=\frac{\pi}{4}$ ⇨ $P_1(x)=\frac{x-\pi/4}{\pi/6-\pi/4}\times\frac{1}{2}+\frac{x-\pi/6}{\pi/4-\pi/6}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

内插通常优于外推。选择要计算的 x 所在的区间的端点，插值效果较好。

x, $f^{(2)}(\xi_x)=-\sin\xi_x$, $\xi_x\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$

$\frac{\pi}{4})$

sin 50° = 0.7660444…

外推 /* extrapolation */ 的 差 ≈ –0.01001

⊕利用 $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{3}$ ⇨ sin 50° ≈ 0.7 8, $0.00538<\tilde{R}_1\left(\frac{5\pi}{18}\right)<0.00660$

内插 /* interpolation */ 的实际误差 ≈ 0.00596

$n = 2$

$$L_2(x) = \frac{(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})}\times\frac{1}{2} + \frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})}\times\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})}{(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 50^0 \approx L_2(\frac{5\pi}{18}) \approx 0.76543$$

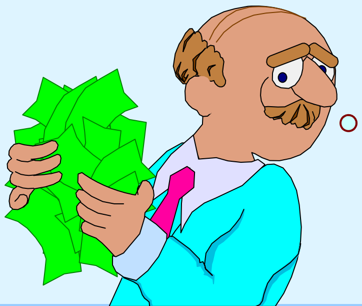
$$R_2(x) = \frac{-\cos\xi_x}{3\,!}(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})\,; \qquad \frac{1}{2} < \cos\xi_x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 0.00044 < R_2\left(\frac{5\pi}{18}\right) < 0.00077$$

$\sin 50° = 0.7660444\ldots$

2次插值的实际误差 ≈ 0.00061

高次插值通常优于低次插值



但绝对不是次数越高就越好，嘿嘿……


Right. Then all
th
m
Excellent point !
We will come to discuss this problem
next time.

§2　牛顿插值公式

Lagrange插值多项式的插值基函数为

$$l_j(x)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}\qquad j=0,1,2,\cdots,n$$

形式上太复杂,计算量很大,并且重复计算也很多。

对**n+1**个互不相同的插值节点，可以证明**n+1**个多项式：

$$1,x-x_0,(x-x_0)(x-x_1),\cdots,(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

是**n**次多项式空间的一个基，这个基也可以表成：

$$\omega_0(x)=1,\omega_i(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1}),i=1,2,\cdots,n$$

Newton插值法就是取这组基作为插值基函数！

设插值多项式$P(x)$具有如下形式

$$P(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$
$$+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$P(x)$应满足插值条件 $P(x_i)=f_i\ , i=0,1,\cdots,n$

有 $P(x_0)=f_0=a_0$ $\qquad a_0=f_0$

$$P(x_1)=f_1=a_0+a_1(x_1-x_0) \qquad a_1=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$$

$$P(x_2)=f_2=a_0+a_1(x_2-x_0)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

$$a_2=\frac{\dfrac{f_2-f_0}{x_2-x_0}-\dfrac{f_1-f_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}$$

一、差商及其基本性质

1. 定义1

称 $f[x_0,x_1]=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ 为函数 $f(x)$ 在 x_0,x_1 点的一阶差商。

称 $f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}$ 为 $f(x)$ 在 x_0,x_1,x_2 点的二阶差商。

一般地，n－1阶差商的差商

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f[x_0,x_1\cdots,x_{n-2},x_n]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-2},x_{n-1}]}{x_n-x_{n-1}}$$

称为函数 $f(x)$ 在 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 点的 n 阶差商。

如何简便的计算各阶差商呢

2. 差商的计算方法(差商表):

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$\boxed{f(x_0)}$				
		$\boxed{f[x_0,x_1]}$			
x_1	$f(x_1)$		$\boxed{f[x_0,x_1,x_2]}$		
		$f[x_1,x_2]$		$\boxed{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}$	
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$		$\boxed{f[x_0,x_1,\cdots,x_4]}$
		$f[x_2,x_3]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	
x_3	$f(x_3)$		$f[x_2,x_3,x_4]$		
		$f[x_3,x_4]$			
x_4	$f(x_4)$				

规定函数值为零阶差商

3. 差商的性质

性质1 (差商的对称性)

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{k=0}^{n}a_k f(x_k)$$

其中$a_k=\dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)}$

它表明差商与节点的排列次序无关

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=f[x_1,x_0,\cdots,x_n]=\cdots$$

由性质1可得

性质2

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$$

$$=\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_n]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

$$=\cdots\cdots$$

性质3 (差商与导数的关系)

若$f(x)$在$[a,b]$上存在n阶导数，且节点$x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$，则至少存在一点$\xi \in [a,b]$，使

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

它表明: n 次多项式的 n 阶差商是一个常数

二、Newton插值多项式

设插值多项式

$$P(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$
$$+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

满足插值条件 $P(x_i)=f_i\ ,i=0,1,\cdots,n$

则待定系数为 $a_0=f_0=f[x_0]$ $a_1=\dfrac{f_1-f_0}{x_1-x_0}=f[x_0,x_1]$

$$a_2=\frac{\dfrac{f_2-f_0}{x_2-x_0}-\dfrac{f_1-f_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}=\frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}=f[x_0,x_1,x_2]$$

$$a_n=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$$

定义. 称 $N_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots$

$$+ a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$= f_0 + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \cdots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)$$

$$= f_0 + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \cdots, x_k]\,\omega_k(x)$$

$\omega_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)$ 为k次多项式

为 $f(x)$ 关于节点 x_i 处的n次Newton基本插值多项式。

由插值多项式的唯一性,Newton基本插值公式的余项为

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

若将$x \neq x_i, (i=0,1,\cdots,n)$视为一个节点,则

$$f[x,x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x,x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]-f[x_0,x_1,\cdots,x_k]}{x-x_k}$$

$$f[x,x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]=f[x_0,x_1,\cdots,x_k]+f[x,x_0,x_1,\cdots,x_k](x-x_k)$$

因此可得 $$f(x)=f_0+f[x,x_0](x-x_0)$$

$$=f_0+(f[x_0,x_1]+f[x,x_0,x_1](x-x_1))(x-x_0)$$

$$=f_0+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x,x_0,x_1](x-x_0)(x-x_1)$$

……

$$=f_0+\sum_{k=1}^{n}f[x_0,x_1,\cdots,x_k]\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)+f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

$$= f_0 + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \cdots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) + f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

$$= N_n(x) + f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

$$= N_n(x) + R_n(x)$$

因此 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) = f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n]\omega_{n+1}(x)$

Newton插值估计误差的重要公式

另外 $f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

例1 已知函数值

x	3	1	5	6
$f(x)$	1	-3	2	4

求其牛顿插值多项式。

解

3	1	2	$-3/8$	$7/40$
1	-3	$5/4$	$3/20$	
5	2	2		
6	4			

所以

$$p(x)=1+2(x-3)-\frac{3}{8}(x-3)(x-1)+\frac{7}{40}(x-3)(x-1)(x-5)$$

例2 已知 $f(x)=shx$的数表， 求二次Newton插值多项式，并计算 $f(0.6)$ 的近似值。

解Ⅰ 首先构造差商

$$f[\;] = \frac{0.69675-0.57815}{0.65-0.55} = 1.18600$$

k	x_i			二阶差商
0	0.55	0.57815		
1	0.65	0.69675	1.18600	
2	0.80	0.88811	1.23984	0.35893

由此可得二次牛顿插值多项式

$$p_2(x) = 0.57815 + 1.18600\times(x-0.55)$$
$$+0.35893\times(x-0.55)(x-0.65)$$

则 $f(0.6) \approx p_2(0.6) = 0.63655$

II 如果又给$f(0.4)=0.41075$，则

k	x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0	0.55	0.57815			
1	0.65	0.69675	1.18600		
2	0.80	0.88811	1.23984	0.35893	
3	0.40	0.41075	1.11600	0.28000	0.19733

由此可得三次牛顿插值多项式

$$p_3(x)=p_2(x)+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$=p_2(x)+0.19733(x-0.55)(x-0.65)(x-0.80)$$

$$f(0.6)\approx P_3(0.6)=0.63655+0.00010=0.63665$$

III 估计$p_3(x)$的截断误差

利用 $f(x)=shx$在某点如x=**0.9**的函数值 f**(0.9) =1.02652** 可得

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]=0.03154$$

$$|R_3(x)|\approx|f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)|$$

故 $|R_3(x)|\approx 0.3154\times10^{-5}$

事实上，准确值=**0.6366535……**

§3 *Hermite* 插值

设$f(x)$在节点$a \le x_0, x_1, \cdots, x_n \le b$处的函数值为$y_0, y_1, \cdots, y_n$,

设$P(x)$为$f(x)$的在区间$[a,b]$上的具有一阶导数的插值函数

(1) 若要求$P(x)$在$[a,b]$上具有一阶导数(一阶光滑度)

即$P(x)$在节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$处必须满足

$$P(x_i) = f(x_i) = y_i \qquad i = 0,1,\cdots,n$$

$$P'(x_i) = f'(x_i) = y_i' \qquad i = 0,1,\cdots,n$$

--------(1)

因此*P*(*x*)可以是最高次数为2*n*+1的多项式

2个节点就可以用3次多项式作为插值函数

(2) 若要求*P*(*x*)在[*a*,*b*]上具有*m*阶导数(*m*阶光滑度)

即$P(x)$在节点$x_0,x_1,\cdots,x_n$处必须满足

$$
\left.\begin{aligned}
P(x_i) &= f(x_i) = y_i \\
P'(x_i) &= f'(x_i) = y_i' \\
P''(x_i) &= f''(x_i) = y_i'' \\
&\cdots \\
P^{(m)}(x_i) &= f^{(m)}(x_i) = y_i^{(m)}
\end{aligned}\right\} \quad i = 0,1,\cdots,n \qquad \text{--------(2)}
$$

定义1. 称满足(1)或(2)式的插值问题为**Hermite插值**，称满足(1)或(2)式的插值多项式*P*(*x*)为**Hermite插值多项式**，记为$H_k(x)$，*k*为多项式次数。

一、两点三次Hermite插值

$H_3(x)$应满足插值条件

$$H_3(x_0)=y_0 \qquad H_3(x_1)=y_1$$

$$H_3'(x_0)=y_0' \qquad H_3'(x_1)=y_1'$$

可设 $\boldsymbol{H_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3}$，可用待定系数法求解。

希望插值系数与Lagrange插值一样简单，易推广

重新假设 $H_3(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+y_0'\beta_0(x)+y_1'\beta_1(x)$

$$H_3'(x)=y_0\alpha_0'(x)+y_1\alpha_1'(x)+y_0'\beta_0'(x)+y_1'\beta_1'(x)$$

考虑：$\alpha_i(\boldsymbol{x})$和$\beta_i(\boldsymbol{x})$是否可类似于$\boldsymbol{l_i(x)}$?

它们满足什么条件？如何求解？

其中

$$\begin{array}{llll}
\boxed{\alpha_0(x_0)=1} & \boxed{\alpha_0(x_1)=0} & \boxed{\alpha_0'(x_0)=0} & \boxed{\alpha_0'(x_1)=0} \\
\alpha_1(x_0)=0 & \alpha_1(x_1)=1 & \alpha_1'(x_0)=0 & \alpha_1'(x_1)=0 \\
\beta_0(x_0)=0 & \beta_0(x_1)=0 & \beta_0'(x_0)=1 & \beta_0'(x_1)=0 \\
\beta_1(x_0)=0 & \beta_1(x_1)=0 & \beta_1'(x_0)=0 & \beta_1'(x_1)=1
\end{array}$$

可知 x_1是$\alpha_0(x)$的二重零点,即可假设

$$\alpha_0(x)=(x-x_1)^2(ax+b)$$

由 $\alpha_0(x_0)=1$ $\alpha_0'(x_0)=0$

可得 $a=-\dfrac{2}{(x_0-x_1)^3}$ $b=\dfrac{1}{(x_0-x_1)^2}+\dfrac{2x_0}{(x_0-x_1)^3}$

$$\alpha_0(x)=(x-x_1)^2(ax+b)$$

$$=(x-x_1)^2\left(-\frac{2x}{(x_0-x_1)^3}+\frac{1}{(x_0-x_1)^2}+\frac{2x_0}{(x_0-x_1)^3}\right)$$

$$=\frac{(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)^2}\left(1+\frac{2x_0}{x_0-x_1}-\frac{2x}{x_0-x_1}\right)$$

$$=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2=(1+2l_1(x))\cdot l_0^2(x)$$

Lagrange
插值基函数

即

$$\alpha_0(x)=(1+2l_1(x))\cdot l_0^2(x)=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

类似可得

$$\alpha_1(x)=(1+2l_0(x))\cdot l_1^2(x)=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$\beta_0(x)=(x-x_0)\cdot l_0^2(x)=\left(x-x_0\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

$$\beta_1(x)=(x-x_1)\cdot l_1^2(x)=\left(x-x_1\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

将以上结果代入 $H_3(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+y_0'\beta_0(x)+y_1'\beta_1(x)$

得两个节点的三次Hermite插值公式

$$H_3(x) = y_0\alpha_0(x) + y_1\alpha_1(x) + y_0'\beta_0(x) + y_1'\beta_1(x)$$

$$= y_0\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 + y_1\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$+y_0'(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 + y_1'(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

标准化的三次Hermite插值基函数

记$\varphi_0(x)=(1+2x)(1-x)^2$，$\varphi_1(x)=x(1-x)^2$则

$$\alpha_0(x)=\varphi_0\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)=\varphi_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right)$$

$$\alpha_1(x)=\varphi_0\left(\frac{x_1-x}{x_1-x_0}\right)=\varphi_0\left(\frac{x_1-x}{h}\right)$$

$$\beta_0(x)=(x_1-x_0)\varphi_1\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)=h\varphi_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right)$$

$$\beta_1(x)=-(x_1-x_0)\varphi_1\left(\frac{x_1-x}{x_1-x_0}\right)=-h\varphi_1\left(\frac{x_1-x}{h}\right)$$

$$\therefore H_3(x)=y_0\varphi_0\left(\tfrac{x-x_0}{h}\right)+y_1\varphi_0\left(\tfrac{x_1-x}{h}\right)+y_0'h\varphi_1\left(\tfrac{x-x_0}{h}\right)-hy_1'\varphi_1\left(\tfrac{x_1-x}{h}\right)$$

便于在计算机上编程实现

其中$h=x_1-x_0$.

二、Hermite插值多项式的存在唯一性(P82 Th3)

三、两点三次Hermite插值的余项(P83 Th4)

两点三次**Hermite**插值的余项为

$$R_3(x) \equiv f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$

$$x_0 \le \xi \le x_1$$

二、Hermite插值多项式的存在唯一性(P82 Th3)

三、两点三次Hermite插值的余项

两点三次**Hermite**插值的误差为

$$R_3(x) = f(x) - H_3(x)$$

$$R_3(x_i) = f(x_i) - H_3(x_i) = 0$$

$$i = 0,1$$

$$R_3'(x_i) = f'(x_i) - H_3'(x_i) = 0$$

x_0, x_1均为$R_3(x)$的二重零点,因此可设

$$R_3(x) = K(x)(x - x_0)^2 (x - x_1)^2$$

其中$K(x)$待定

构造辅助函数

均是
二重根

$$\varphi(t) = f(t) - H_3(t) - K(x)(t - x_0)^2 (t - x_1)^2$$

$$\varphi(x_i) = f(x_i) - H_3(x_i) - K(x)(x_i - x_0)^2 (x_i - x_1)^2 = 0 \quad i = 0,1$$

$$\varphi(x) = f(x) - H_3(x) - K(x)(x - x_0)^2 (x - x_1)^2 = 0$$

因此$\varphi(t)$至少有5个零点

连续使用4次Rolle定理，可得，至少存在一点$\xi \in [x_0, x_1]$

使得 $\varphi^{(4)}(\xi) = 0$

即 $$\varphi^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - 4!K(x) = 0$$

$$K(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$$

所以,两点三次**Hermite**插值的余项为

$$R_3(x) \equiv f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2(x - x_1)^2$$

$$x_0 \le \xi \le x_1$$

例1. 已知$f(x)$在节点1,2处的函数值为$f(1)=2, f(2)=3$

$f(x)$在节点1,2处的导数值为$f'(1)=0, f'(2)=-1$

求$f(x)$的两点三次插值多项式,及$f(x)$在$x=1.5,1.7$处的函数值.

解: $x_0=1, x_1=2 \quad y_0=2, y_1=3 \quad y_0'=0, y_1'=-1$

$$H_3(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+y_0'\beta_0(x)+y_1'\beta_1(x)$$

$$=y_0\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+y_1\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$+y_0'(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+y_1'(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$H_3(x) = 2\big(1+2(x-1)\big)(x-2)^2 + 3\big(1-2(x-2)\big)\ (x-1)^2$$

$$-(x-2)(x-1)^2$$

$$= -3x^3 + 13x^2 - 17x + 9$$

$$f(1.5) \approx H_3(1.5) = 2.625$$

$$f(1.7) \approx H_3(1.7) = 2.931$$

思考题

已知$y=f(x)$的数据如下表：

x	1	2	3
y	2	4	12
y'		3	

1. 利用基函数方法，求$f(x)$的三次Hermite插值多项式$H_3(x)$;
2. 写出$H_3(x)$的插值余项表达式，并证明结论；
3. 假设$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$为四次多项式，分析一下能否利用$H_3(x)$的插值余项求出$f(x)$的准确表达式？若能，请求出它。

例3. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2},x\in[-5,5]$

将$[-5,5]$ n等份取$n+1$个节点$x_i=-5+ih,h=\dfrac{10}{n},i=0,1,\cdots,n$

试就$n=2,4,6,8,10$作$f(x)$的n次$Lagrange$插值多项式

并作图比较.

解: $y_i=f(x_i)=\dfrac{1}{1+x_i^2}$

作n次$Lagrange$插值多项式

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{1}{1+x_j^2}\cdot\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}\right]\qquad n=2,4,6,8,10$$

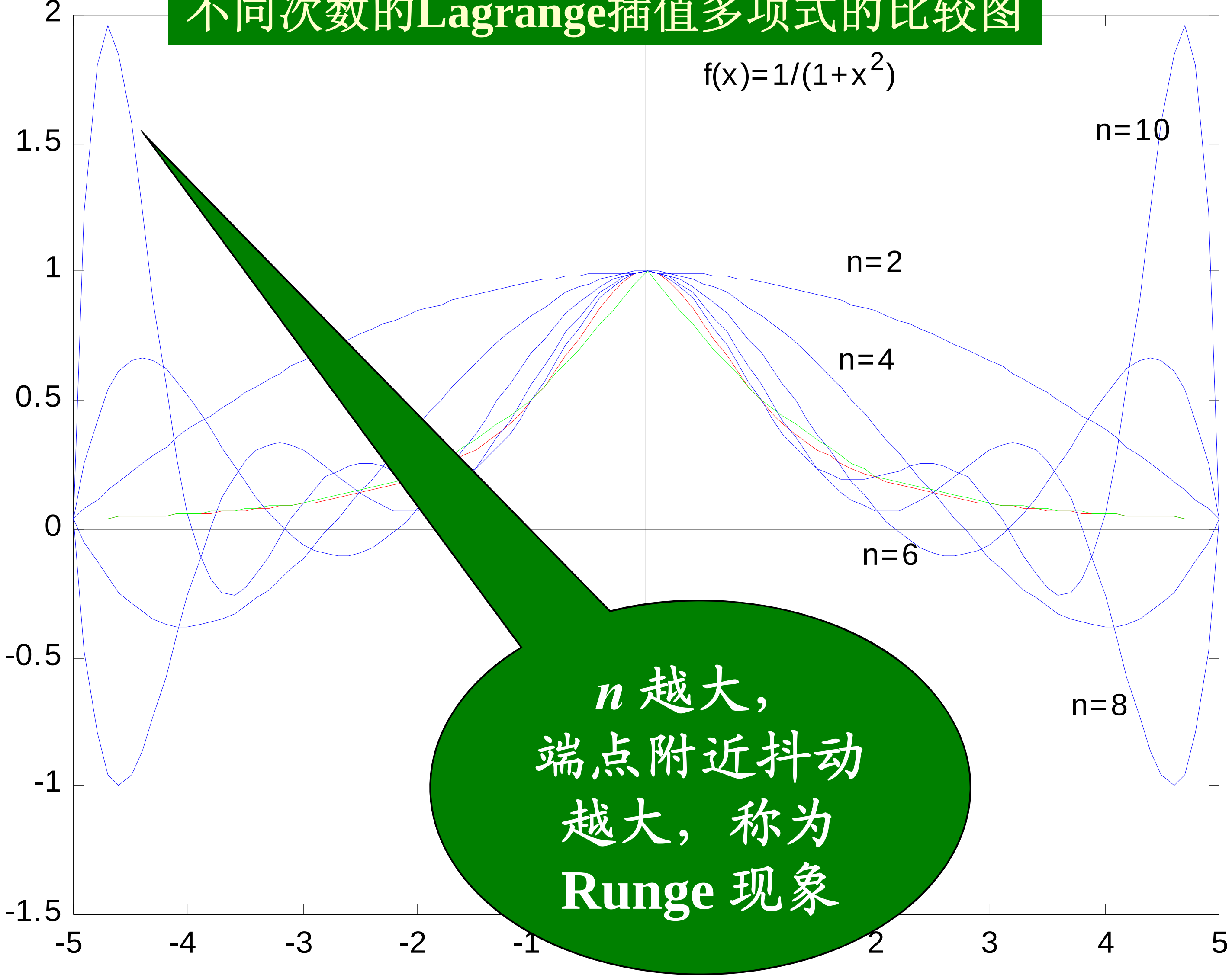
```
%lagrangen.m
function y=lagrangen(x0,y0,x)
n=length(x0);m=length(x);
for i=1:m
   z=x(i);s=0;
   for k=1:n
      L=1;
      for j=1:n
         if j~=k
            L=L*(z-x0(j))/(x0(k)-x0(j));
         end
      end
      s=s+L*y0(k);
   end
   y(i)=s;
end
y;
```

Lagrange插值多项式求插值的Matlab程序.

比较不同的插值多项式次数对插值的影响

```
%Chazhibijiao.m
x=-5:0.1:5;z=0*x;y=1./(1+x.^2);
plot(x,z,'k',x,y,'r')
axis([-5 5 -1.5 2]);pause,hold on
for n=2:2:10
   x0=linspace(-5,5,n+1);   y0=1./(1+x0.^2);
   x=-5:0.1:5; y1=lagrangen(x0,y0,x);
   plot(x,y1), pause
end
y2=1./(1+x0.^2);y=interp1(x0,y2,x);
plot (x,y,'k'),hold off
gtext('n=2'),gtext('n=4'),gtext('n=6')
gtext('n=8'),gtext('n=10')
gtext('f(x)=1/(1+x^2)')
```

不同次数的Lagrange插值多项式的比较图



结果表明,并不是插值多项式的次数越高,插值效果越好,精度也不一定是随次数的提高而升高,这种现象在上个世纪初由**Runge**发现,故称为**Runge**现象.

§4　分段多项式插值

从上节可知,如果插值多项式的次数过高，可能产生**Runge**现象，因此，在构造插值多项式时常采用分段插值的方法。

一、分段线性Lagrange插值

1. 分段线性插值的构造

设插值节点为 x_i ， 函数值为 y_i , $i=0,1,\cdots,n$

$$h_i = x_{i+1} - x_i \ , i=0,1,2,\cdots,n-1 \qquad h = \max_i h_i$$

任取两个相邻的节点x_k, x_{k+1},形成一个插值区间$[x_k, x_{k+1}]$

构造Lagrange线性插值

$$P_1^{(k)}(x) = y_k l_k(x) + y_{k+1} l_{k+1}(x) \qquad k = 0,1,\cdots,n-1$$

$$= y_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \quad \text{--------(1)}$$

$$P_1(x) = \begin{cases} P_1^{(0)}(x) & x_0 \le x < x_1 \\ P_1^{(1)}(x) & x_1 \le x < x_2 \\ \vdots & \vdots \\ P_1^{(n-1)}(x) & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases} \quad \text{--------(2)}$$

显然 $P_1(x_i) = y_i \ , \ i = 0,1,\cdots,n$

我们称由**(1)(2)**式构成的插值多项式 $P_1(x)$ 为

分段线性Lagrange插值多项式

设$x = x^*$为插值点

若$x_k \le x^* \le x_{k+1}$

$$y^* = P_1(x^*) = P_1^{(k)}(x^*)$$

内插

$$= y_k \frac{x^* - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x^* - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

若$x^* \le x_0$　外插

取 $y^* = P_1(x^*) = P_1^{(0)}(x^*) = y_0 \frac{x^* - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x^* - x_0}{x_1 - x_0}$

若$x^* \ge x_n$　外插

取 $y^* = P_1(x^*) = P_1^{(n-1)}(x^*) = y_{n-1} \frac{x^* - x_n}{x_{n-1} - x_n} + y_n \frac{x^* - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$

$y = P_1(x)$ 的图像

实际上是连接点(x_k, y_k)，

$i = 0,1,\cdots,n$的一条折线

也称折线插值,如右图

曲线的光滑性较差

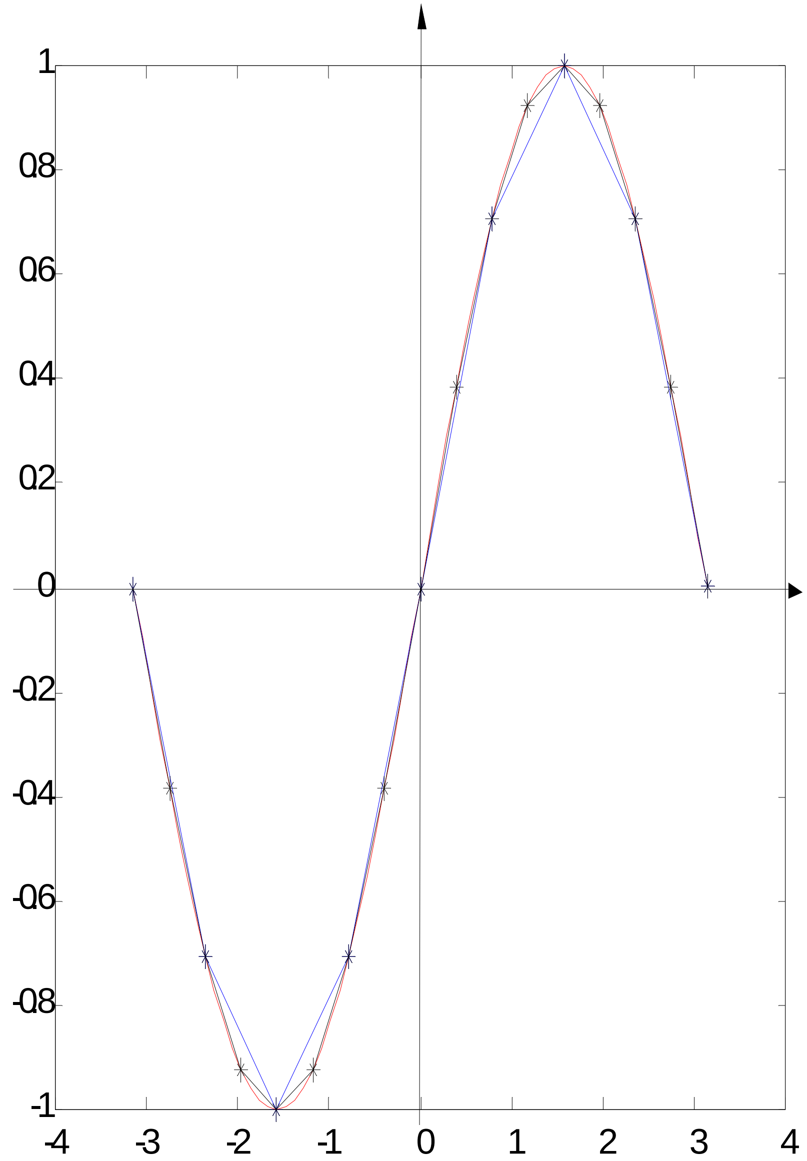
在节点处有尖点

但如果增加节点的数量

减小步长,会改善插值效果

因此　若$f(x)$在$[a,b]$上连续

则　$\lim\limits_{h\to 0} P_1(x) = f(x)$



2. 分段线性插值的误差估计

由第二节定理1可知,n次Lagrange插值多项式的余项为

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

那么分段线性插值$L_1(x)$的余项为

$$R_1(x) = f(x) - P_1(x) = f(x) - P_1^{(k)}(x)$$

$$= \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_k)(x - x_{k+1}) \qquad \xi, x \in [x_k, x_{k+1}], \text{且}\xi\text{与}x\text{有关}$$

$$|R_1(x)| \le \frac{1}{2} \cdot \max_{a \le x \le b} |f''(x)| \cdot \max_{\substack{a \le x \le b \\ k}} |(x - x_k)(x - x_{k+1})|$$

$$\le \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot \frac{1}{4} h^2 = \frac{1}{8} M_2 h^2$$

二、分段二次Lagrange插值

1. 分段二次插值的构造

分段线性插值的光滑性较差,且精度不高

因此,当节点较多时,可根据情况构造分段二次插值

设插值节点为 x_i ， 函数值为 y_i ,$i=0,1,\cdots,n$

$$h_i = x_{i+1} - x_i \ , i=0,1,2,\cdots,n-1 \qquad h=\max_i h_i$$

任取三个相邻节点x_{k-1},x_k,x_{k+1},以$[x_{k-1},x_{k+1}]$为插值区间

构造Lagrange二次插值

$$P_2^{(k)}(x) = y_{k-1}l_{k-1}(x) + y_k l_k(x) + y_{k+1}l_{k+1}(x) \qquad k=1,2,\cdots,n-1$$

$$P_2^{(k)}(x) = y_{k-1}\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})} + y_k\frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

$$+\,y_{k+1}\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)} \qquad k=1,2,\cdots,n-1$$

上式称为**分段二次Lagrange插值**

若x^*为插值点,且$x^* \in [x_k, x_{k+1}]$

显然,插值区间 $[x_{k-1}, x_{k+1}]$和$[x_k, x_{k+2}]$ 都包含x^*

那么 $y^* = P_2^{(k)}(x^*)$ 还是 $y^* = P_2^{(k+1)}(x^*)$

一般

若$x_k \le x^* \le x_{k+1}$，且x^*更接近x_k，则

$$y^* = P_2^{(k)}(x^*) \qquad k = 1,2,\cdots,n-1$$

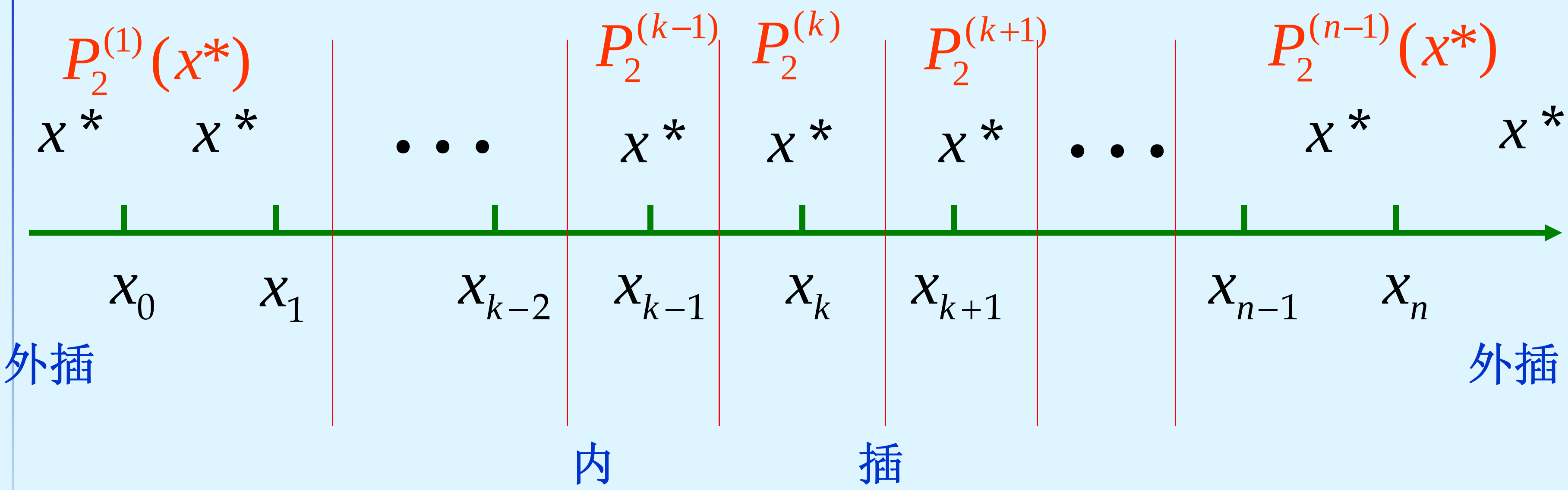
若$x_k \le x^* \le x_{k+1}$，且x^*更接近x_{k+1}，则

$$y^* = P_2^{(k+1)}(x^*) \qquad k = 0,1,\cdots,n-2$$

若$x^* \le x_1$ (含$x^* \le x_0$)，则 $\quad y^* = P_2^{(1)}(x^*)$

若$x^* \ge x_{n-1}$ (含$x^* \ge x_n$)，则 $\quad y^* = P_2^{(n-1)}(x^*)$

$x^* \le x_0$ 和 $x^* \ge x_n$ 时使用的方法是外插


$P_2^{(1)}(x^*)$
$P_2^{(k-1)}$
$P_2^{(k)}$
$P_2^{(k+1)}$
$P_2^{(n-1)}(x^*)$
x^* x^* $\cdots$ x^* x^* x^* $\cdots$ x^* x^*
x_0 x_1 x_{k-2} x_{k-1} x_k x_{k+1} x_{n-1} x_n
外插
外插
内
插

2. 分段二次插值的误差估计

由于 $$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

那么分段二次插值$L_2(x)$的余项为

$$R_2(x) = f(x) - P_2(x) = f(x) - P_2^{(k)}(x)$$

$$= \frac{f'''(\xi)}{6}(x - x_{k-1})(x - x_k)(x - x_{k+1})$$

$\xi, x \in [x_{k-1}, x_{k+1}]$,
且ξ与x有关

$$|R_2(x)| \le \frac{1}{6} \cdot \max_{a \le x \le b} |f'''(x)| \cdot \max_{\substack{x_{k-1} \le x \le x_{k+1} \\ k}} |(x - x_{k-1})(x - x_k)(x - x_{k+1})|$$

$$\boxed{\le \frac{\sqrt{3}}{27} M_3 h^3}$$

例: 设$f(x)$在各节点处的数据为

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.30	0.40	0.55	0.65	0.80	1.05
y_i	0.30163	0.41075	0.57815	0.69675	0.87335	1.18885

求$f(x)$在$x=0.36,0.42,0.75,0.98,1.1$处的近似值(用分段线性、二次插值),

解: **(1). 分段线性Lagrange插值的公式为**

$$P_1^{(k)}(x) = y_k \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} + y_{k+1}\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \qquad k=0,1,\cdots,n-1$$

$$f(0.36) \approx P_1^{(0)}(0.36) = 0.30163\frac{0.36-0.4}{0.3-0.4} + 0.41075\frac{0.36-0.3}{0.4-0.3}$$

$$= 0.36711$$

$$f(0.42) \approx P_1^{(1)}(0.42) = 0.41075\frac{0.42-0.55}{0.4-0.55} + 0.57815\frac{0.42-0.4}{0.55-0.4}$$

$$= 0.43307$$

同理

$$f(0.75) \approx P_1^{(3)}(0.75) = 0.81448$$

$$f(0.98) \approx P_1^{(4)}(0.98) = 1.10051$$

$$f(1.1) \approx P_1^{(4)}(1.1) = 0.87335\frac{1.1-1.05}{0.8-1.05} + 1.18885\frac{1.1-0.8}{1.05-0.8}$$

$$= 1.25195$$

(2). 分段二次Lagrange插值的公式为

$$P_2^{(k)}(x) = y_{k-1}\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})} + y_k\frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

$$+\, y_{k+1}\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)} \qquad k = 1,2,\cdots,n-1$$

$$f(0.36) \approx P_2^{(1)}(0.36) = y_0\frac{(0.36-x_1)(0.36-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$+\, y_1\frac{(0.36-x_0)(0.36-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(0.36-x_0)(0.36-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= 0.36686$$

$f(0.42) \approx$

$$P_2^{(1)}(0.42) = y_0 \frac{(0.42 - x_1)(0.42 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(0.42 - x_0)(0.42 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$+ y_2 \frac{(0.42 - x_0)(0.42 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = 0.43281$$

$f(0.75) \approx$

$$P_2^{(4)}(0.75) = y_3 \frac{(0.75 - x_4)(0.75 - x_5)}{(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)} + y_4 \frac{(0.75 - x_3)(0.75 - x_5)}{(x_4 - x_5)(x_4 - x_5)}$$

$$+ y_5 \frac{(0.75 - x_3)(0.75 - x_4)}{(x_5 - x_3)(x_5 - x_4)} = 0.81343$$

$f(0.98) \approx P_2^{(4)}(0.98) = 1.09784$ $\qquad$ $f(1.1) \approx P_2^{(4)}(1.1) = 1.25513$

四、分段两点三次Hermite插值

设函数$f(x)$在$[a,b]$上的节点x_i上的函数值为$y_i, i=0,1,\cdots,n$

在节点x_i上的导数值为$y_i', i=0,1,\cdots,n$

对任意两个相邻的节点$x_k, x_{k+1}, k=0,1,\cdots,n-1$

可构造两点三次Hermite插值多项式

$$H_3^{(k)}(x) = y_k\alpha_0^{(k)}(x) + y_{k+1}\alpha_1^{(k)}(x) + y_k'\beta_0^{(k)}(x) + y_{k+1}'\beta_1^{(k)}(x)$$

$$x \in [x_k, x_{k+1}] \qquad k=0,1,\cdots,n-1$$

$\alpha_0^{(k)}(x), \alpha_1^{(k)}(x), \beta_0^{(k)}(x), \beta_1^{(k)}(x)$为$Hermite$插值基函数

其中 $$\alpha_0^{(k)}(x)=\left(1+2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2$$

$$\alpha_1^{(k)}(x)=\left(1+2\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$$

$$\beta_0^{(k)}(x)=(x-x_k)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2 \qquad \beta_1^{(k)}(x)=(x-x_{k+1})\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$$

我们称 $H_3(x)=H_3^{(k)}(x)$ ， $k=0,1,\cdots,n-1$

为分段三次**Hermite**插值多项式，其余项为

$$|R_3(x)|\le \max_{0\le k\le n-1}|R_3^{(k)}(x)| = \max_{0\le k\le n-1}\left[\left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\right|(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2\right]$$

$$=\frac{M_4}{4!}\max_{\substack{x_k\le x\le x_{k+1}\\ 0\le k\le n-1}}(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$$

即 $$\left|R_3(x)\right| \le \frac{h^4}{384} M_4$$

例：构造函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $1 \le x \le 20$ 上等距数表，应如何选取步长 h，才能使(1)分段线性插值，(2)分段三次Hermite插值的误差不超过 $\dfrac{1}{4}\times 10^{-6}$

分段低次Lagrange插值的特点

计算较容易　　可以解决**Runge**现象

但插值多项式分段　　插值曲线在节点处会出现尖点

插值多项式在节点处不可导

§4.5 三次样条插值

样条由来

许多工程技术中提出的计算问题对插值函数的光滑性有较高要求，如飞机的机翼外形,内燃机的进、排气的凸轮曲线，都要求曲线有较高的光滑程度，不仅要求连续，而且要求连续的曲率，即二阶导数连续。这就导致了样条插值的产生。

所谓样条(**Spline**)本来是工程设计中使用的一种绘图工具，它是富有弹性的细木条或细金属条。绘图员利用它把已知点连接成一条光滑曲线，并使连接点处有连续的曲率。

1946年,**Schoenberg**将样条引入数学。

一 样条函数

由一些具有某些连续性条件的子区间上的分段多项式构成。

1 三次样条函数

设$a \le x_0, x_1, \cdots, x_n \le b$, 如果函数$S(x)$满足：

(1) 在每个小区间$[x_k, x_{k+1}]$上，$S(x)$都是次数≤ 3的多项式；

(2) 在$[a,b]$上$S(x)$具有2阶连续导数，即$S(x) \in C^2[a,b]$

$\Leftrightarrow S(x)$、$S'(x)$、$S''(x)$在区间$[a,b]$上都连续。

则称 $S(x)$为区间$[a,b]$上的三次样条函数。

如，$S(x) = \begin{cases} x^3 - 1, x \in [-1,0] \\ 3x^3 - 1, x \in [0,1] \end{cases}$为$[-1,1]$上的三次样条函数。

2 三次样条插值函数

如果$f(x)$在节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$处的函数值为

$$f(x_j) = y_j, j = 0, 1, \cdots, n$$

而三次样条函数$S(x)$满足

$$S(x_j) = y_j, j = 0, 1, \cdots, n$$

则称$S(x)$为$f(x)$在$[a, b]$上的三次样条插值函数。

一个例子

已知$f(x)$的数据：

x	-1	0	1
$f(x)$	1	2	-1

，试确定系数$a_i,b_i(i=1,2,3)$,使

$$s(x)=\begin{cases} a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0, x\in[-1,0] \\ b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0, x\in[0,1] \end{cases}$$

成为$f(x)$在$[-1,1]$上满足条件$s''(-1)=s''(1)=0$的三次插值函数。

解

$$s(-1)=f(-1)=1: \quad -a_3+a_2-a_1+a_0=1 \quad -(1)$$

$$s(0)=f(0)=2: \quad a_0=b_0=2 \quad -(2,3)$$

$$s(1)=f(1)=-1: \quad b_3+b_2+b_1+b_0=-1 \quad -(4)$$

$$s'(x)=\begin{cases} 3a_3x^2+2a_2x+a_1, x\in(-1,0) \\ 3b_3x^2+2b_2x+b_1, x\in(0,1) \end{cases}$$

$$s'(0-0)=s'(0+0): \quad a_1=b_1 \quad -(5)$$

已知$f(x)$的数据：

x	-1	0	1
$f(x)$	1	2	-1

，试确定系数$a_i, b_i (i=1,2,3)$，使

$$s(x)=\begin{cases} a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0, x\in[-1,0] \\ b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0, x\in[0,1] \end{cases}$$

成为$f(x)$在$[-1,1]$上满足条件$s''(-1)=s''(1)=0$的三次插值函数。

$$s''(x)=\begin{cases} 6a_3x+2a_2, x\in(-1,0) \\ 6b_3x+2b_2, x\in(0,1) \end{cases}$$

$$s''(0-0)=s''(0+0):\quad 2a_2=2b_2 \quad -(6)$$

$$s''(-1)=0:\quad -6a_3+2a_2=0 \quad -(7)$$

$$s''(1)=0:\quad 6b_3+2b_2=0 \quad -(8)$$

联立**(1)-(8)**,解得：

$$a_0=2, a_1=-1, a_2=-3, a_3=-1, b_0=2, b_1=-1, b_2=-3, b_3=1$$

$$\therefore s(x)=\begin{cases} -x^3-3x^2-x+2, x\in[-1,0] \\ x^3-3x^2-x+2, x\in[0,1] \end{cases}$$

3 边界条件

第一类(一阶)边界条件 $S'(x_0)=m_0 \quad S'(x_n)=m_n$

第二类(二阶)边界条件 $S''(x_0)=M_0 \quad S''(x_n)=M_n$

第三类(周期)边界条件 $\lim\limits_{x\to x_0^+} S_0^{(p)}(x)=\lim\limits_{x\to x_n^-} S_{n-1}^{(p)}(x)$

$$p=0,1,2$$

二 求样条函数的三弯距法

- 设出$s(x)$在各节点的二阶导数值，即

$$\boxed{s''(x_j)=M_j} \qquad (j=0,1,\cdots,n)$$

考虑区间$[x_{j-1},x_j]$，在此区间上，$s(x)=s_j(x)$是三次多项式，故$s_j''(x)$为线性函数，且

$$s_j''(x_{j-1})=s''(x_{j-1})=M_{j-1},\quad s_j''(x_j)=s''(x_j)=M_j$$

利用线性插值公式，即可得$s_j''(x)$的表达式：

$$s_j''(x)=\frac{x_j-x}{h_j}M_{j-1}+\frac{x-x_{j-1}}{h_j}M_j \quad , \quad h_j=x_j-x_{j-1}$$

$$s_j''(x)=\frac{x_j-x}{h_j}M_{j-1}+\frac{x-x_{j-1}}{h_j}M_j$$

积分两次后即可得$s_j(x)$的表达式:

$$s_j(x)=\frac{(x_j-x)^3}{6h_j}M_{j-1}+\frac{(x-x_{j-1})^3}{6h_j}M_j+c_1x+c_2$$

将插值条件$s_j(x_{j-1})=y_{j-1},s_j(x_j)=y_j$代入可确定积分常数$c_1$和$c_2$，整理上式得:

$$\boxed{\begin{aligned}s_j(x)=&\frac{(x_j-x)^3}{6h_j}M_{j-1}+\frac{(x-x_{j-1})^3}{6h_j}M_j\\&+(y_{j-1}-\frac{M_{j-1}h_j^2}{6})\frac{x_j-x}{h_j}+(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6})\frac{x-x_{j-1}}{h_j}\end{aligned}}$$

只需确定$M_0,M_1,\cdots,M_n$即可给出$s(x)$的表达式。

对$s_j(x)$求导得：

$$\boxed{s_j'(x)=-\frac{(x_j-x)^2}{2h_j}M_{j-1}+\frac{(x-x_{j-1})^2}{2h_j}M_j+\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}-\frac{M_j-M_{j-1}}{6}h_j}$$

$s(x)$各个节点处的一阶导数存在$s'(x_j^-)=s'(x_j^+)$，即有

即：$\boxed{s_j'(x_j^-)=s_{j+1}'(x_j^+)}$

$$\boxed{\frac{h_j}{2}M_j-\frac{h_j}{6}(M_j-M_{j-1})+\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}=-\frac{h_{j+1}}{2}M_j-\frac{h_{j+1}}{6}(M_{j+1}-M_j)+\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}}$$

整理后得关于M_{j-1}、M_j和M_{j+1}的方程：

三弯距方程

$$\boxed{\mu_j M_{j-1}+2M_j+\lambda_j M_{j+1}=d_j\quad(j=1,2,\cdots,n-1)}$$

共$n-1$个方程，附加边界条件，补充两个方程后，即可确定$n+1$个未知量$M_1,\cdots,M_n$。

其中：

$$\begin{cases} \mu_j = \dfrac{h_j}{h_j + h_{j+1}}, \quad \lambda_i = \dfrac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} \qquad \mu_j + \lambda_j = 1 \\ d_j = \dfrac{6}{h_j + h_{j+1}}\left[\dfrac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \dfrac{y_j - y_{j-1}}{h_j}\right] \end{cases}$$

$$(j = 1, 2, \cdots, n-1)$$

- 第一类边界条件：$s'(x_0)=y'_0$，$s'(x_n)=y'_n$

直接代入$s_j(x)$的一阶函数表达式，即得：

$$2M_0+M_1=6\left((y_1-y_0)/h_1-y'_0\right)\Big/h_1\equiv d_0$$

$$M_{n-1}+2M_n=6\left(y'_n-(y_n-y_{n-1})/h_n\right)\Big/h_n\equiv d_n$$

与前面的$n-1$个方程联立得$n+1$阶线性方程组：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

系数矩阵严格对角占优，故可逆，方程组有唯一解.

- 第二类边界条件：$S''(x_0)=y_0''$， $S''(x_n)=y_n''$

直接可得 $\boxed{M_0=y_0'',\quad M_n=y_n''}$

前面方程中只含$n-1$个未知量，即可得$n-1$阶线性方程组：

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1-\mu_1 y_0'' \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1}-\lambda_{n-1}y_n'' \end{bmatrix}$$

系数矩阵严格对角占优，方程组存在唯一解。

- 第三类边界条件：$S'(x_0)=S'(x_n),\quad S''(x_0)=S''(x_n)$

可得 $\boxed{M_0=M_n,\quad \lambda_n M_1+\mu_n M_{n-1}+2M_n=d_n}$

其中$\lambda_n=h_1/(h_1+h_n),\mu_n=h_n/(h_1+h_n)$

$$d_n=6\big((y_1-y_0)/h_1-(y_n-y_{n-1})/h_n\big)/(h_1+h_n)$$

与前面的$n-1$个方程联立得n-1阶线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

系数矩阵严格对角占优，故可逆，方程组有唯一解.

- 综上所述，满足插值条件$S(x_j)=y_j$和某一类边界条件的三次样条函数存在且唯一！

- 具体计算过程

✓ 根据插值条件$S(x_j)=y_j$和给定的边界条件列出相应的方程组；

✓ 解出该方程组的解$M_0, M_1, \cdots, M_n$；

✓ 将$M_0, M_1, \cdots, M_n$代入$S_j(x)$的表达式，写出三次样条函数$S(x)$在整个插值区间上的分段表达式。

例1　对给定的节点和函数值：

k	0	1	2	3
x_k	1	2	4	5
$f(x_k)$	1	3	4	2

求满足自然边界条件$S''(x_0)=S''(x_n)=0$的三次样条插值函数$S(x)$,并求$f(3)$的近似值。

解　由 $\lambda_k=\dfrac{h_{k+1}}{h_k+h_{k+1}}$，　$\mu_k=\dfrac{h_k}{h_k+h_{k+1}}=1-\lambda_k$　　$k=1,2$

$$d_k=\frac{6}{h_k+h_{k+1}}\left(\frac{y_{k+1}-y_k}{h_{k+1}}-\frac{y_k-y_{k-1}}{h_k}\right)$$

得　$\lambda_1=\dfrac{2}{3}$　$\lambda_2=\dfrac{1}{3}$　$\mu_1=\dfrac{1}{3}$　$\mu_2=\dfrac{2}{3}$

$d_1=-3$　$d_2=-5$

代入方程组： $$\begin{pmatrix} 2 & 2/3 \\ 2/3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ -15 \end{pmatrix}$$

解方程组得： $M_0=0, M_1=-\dfrac{3}{4}, M_2=-\dfrac{9}{4}, M_3=0$

所以， $$S(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{8}x^3+\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{7}{4}x-1 & 1\le x\le 2 \\ -\dfrac{1}{8}x^3+\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{7}{4}x-1 & 2\le x\le 4 \\ \dfrac{3}{8}x^3-\dfrac{45}{8}x^2+\dfrac{103}{4}x-33 & 4\le x\le 5 \end{cases}$$

$$f(3)\approx S(3)=\frac{17}{4}$$

- 注：关于$S(x)$的表达式，需写成如下形式：

$$\boxed{S_j(x)=a_0(x-x_{j-1})^3+a_1(x-x_{j-1})^2+a_2(x-x_{j-1})+a_3}$$

Matlab中三次样条插值函数**spline**输出的多项式就是按上面的格式输出的！

$$\boxed{s_j(x)=\frac{(x_j-x)^3}{6h_j}M_{j-1}+\frac{(x-x_{j-1})^3}{6h_j}M_j+(y_{j-1}-\frac{M_{j-1}h_j^2}{6})\frac{x_j-x}{h_j}+(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6})\frac{x-x_{j-1}}{h_j}}$$

$$\Big\downarrow \quad x_j=x_{j-1}+h_j$$

$$\boxed{s_j(x)=\frac{M_j-M_{j-1}}{6h_j}(x-x_{j-1})^3+\frac{M_{j-1}}{2}(x-x_{j-1})^2+(\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}-\frac{(M_j+2M_{j-1})h_j}{6})(x-x_{j-1})+y_{j-1}}$$

三 Matlab插值函数

- yh = interp1(x,y,xh) 一维线性插值$f(x)$

x为插值节点(*n*维向量), y为函数值(*n*维向量),
xh为插值点(可以是向量)

- yh = interp1(x,y,xh,*method*) 一维线性插值$f(x)$

可指定插值方法:'nearest', 'linear', 'spline', 'pchip'。

省确为线性插值　调用spline函数　调用pchip函数

- interp2(二维)、interp3(三维)、interpn(*n*维)

具体用法查看Matlab的help文档。

- yh = spline(x,y,xh)　　三次样条插值

x为节点(n维向量), y为函数值(可以是$m \times n$维矩阵), xh为插值点(可以是向量)

- pp = spline(x,y)

返回一个结构类型的数据pp，需用unmkpp函数解开。

[breaks,coefs,nploys,ncofs,dim]=unmkpp(pp)

节点

是个矩阵，第i行为s_i(x)的系数。

多项式个数n

每个多项式的系数个数

维数m

边界条件的选取

✓ 若*x*与*y*的长度相等，则边界条件为:(not-a-knot)

$$f'''(x_0)=f'''(x_1),\ \ f'''(x_{n-1})=f'''(x_n)$$

✓ 若*y*的长度比*x*长2，则边界条件为：

$$f'(x_0)=y(1),\ \ f'(x_n)=y(n+2) \quad \boxed{x_0=\min(x), x_n=\max(x)}$$

即：$y=[f'(x_0), f(x_0), \cdots, f(x_n), f'(x_n)]$

yh = ppval(pp,xh)

```
pp=spline(x,y);
yh=ppval(pp,xh)
```

⟺

```
yh=spline(x,y,xh);
```

- **pp = csape(x,y,conds)**

可以指定各种边界条件的三次样条插值函数，是**Matlab spline toolbox**中的函数。

✓ **conds**的取值：

'complete'：第一类边界条件(省确边界条件)

$$f'(x_0) = y(1), f'(x_n) = y(n+2)$$

'not-a-knot'：非扭结

'periodic'：周期(第三类)边界条件

'second'：第二类边界条件

'variational'：自然边界条件

✓ 更详细的用法：`help csape / doc csape`

用Matlab函数求三次样条的一个例子

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	0	0.15	1.12	2.36	2.36	1.46	0.49	0.06	0
y'	0								0

如下代码求解上述样条问题：

```
x = -4:4;
y = [0 .15 1.12 2.36 2.36 1.46 .49 .06 0];
cs = spline(x,[0 y 0]); %y比x多两个元素!
xx = linspace(-4,4,101);%将[-4,4]划分成100等份，以便作出样条插值多项式的图形!
plot(x,y,'o',xx,ppval(cs,xx),'-');%作样条插值多项式的图形
```

注：'cs'是一个结构变量。

结构变量'cs'为：

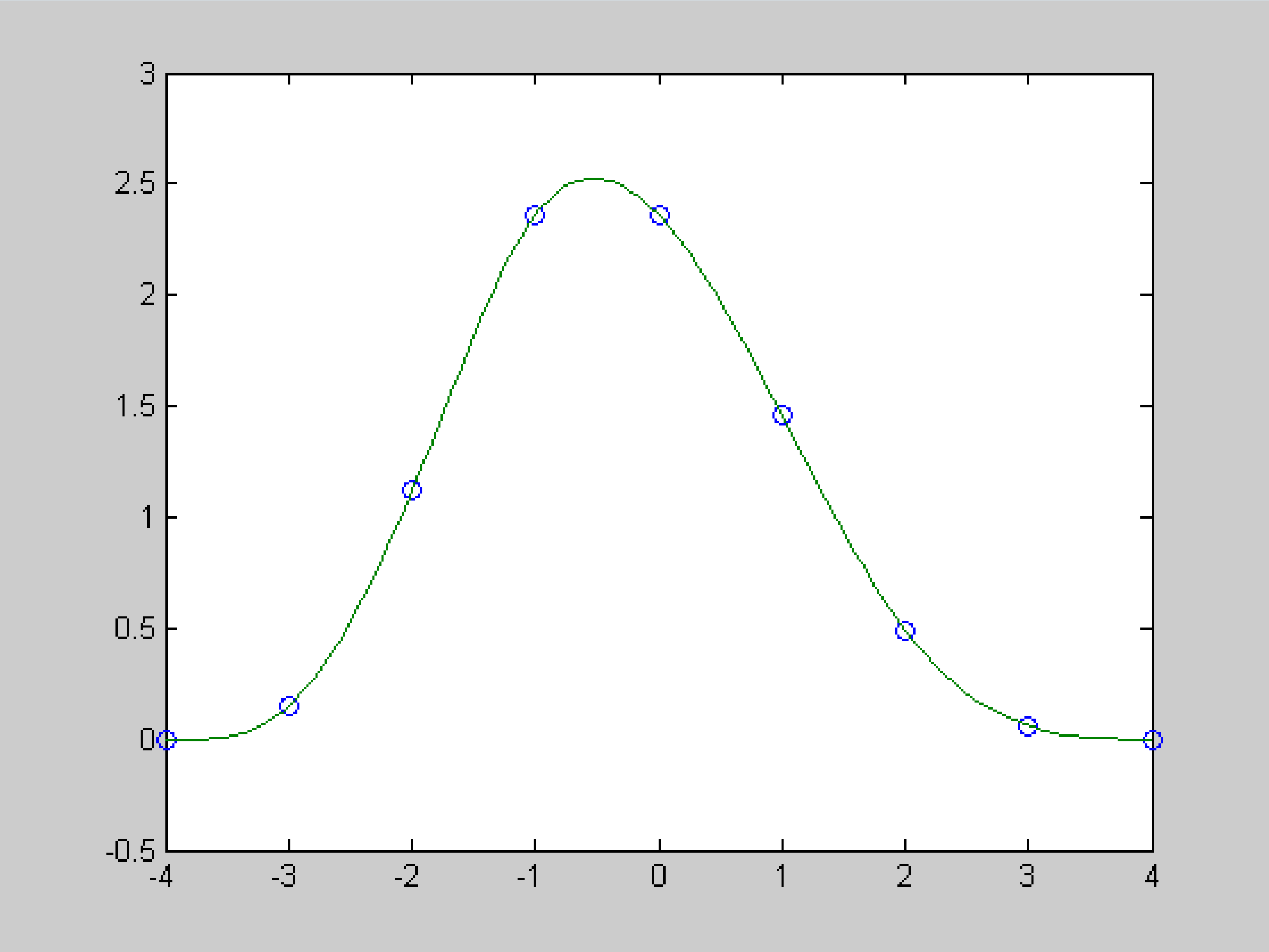
```
>> cs
cs =
   form: 'pp'
   breaks: [-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4]
   coefs: [8x4 double]
   pieces: 8
   order: 4
   dim: 1
```

```
>> cs.coefs
ans =
   0.2034   -0.0534        0         0
  -0.0903    0.5569    0.5034    0.150
  -0.3921    0.2859    1.3462    1.1200
   0.1488   -0.8904    0.7417    2.3600
   0.1370   -0.4441   -0.5929    2.3600
   0.1332   -0.0331   -1.0701    1.4600
  -0.0600    0.3666   -0.7366    0.4900
  -0.0633    0.1867   -0.1833    0.0600
```

对应的三次样条插值多项式表达式：

$$S(x)=\begin{cases}0.2034(x-x_0)^3-0.0534(x-x_0)^2\\ -0.0903(x-x_1)^3+0.5569(x-x_1)^2+0.5034(x-x_1)+0.1500\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -0.0633(x-x_8)^3+0.1867(x-x_8)^2-0.1833(x-x_8)+0.0600\end{cases}$$

对应的三次样条插值多项式图形：



课堂练习

1、 用基函数方法求满足下列条件的四次插值多项式

x	-1	0	1
y	0	2	0
y'	4		0

2. 设 $l_i(x)$ 以 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为节点的插值基函数，问

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) x_i^k \equiv x^k$$ 是否成立 ？

k=0,1, … ,n+1

例 3　已知 $f(x)$ 的数表($f(x)$ 是多项式)，求 $f(x)$ 的最高次数及最高次数的系数.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	−7	−4	5	26	65	128

k	x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0	0	−7			
1	1	−4	3		
2	2	5	9	3	
3	3	26	21	6	1
4	4	65	39	9	1
5	5	128	63	12	1

课后作业:

1、复习思考题:

1、2、5、6

2、习题四:1、3、4、6、15、17