第十讲

习题课（二）

重要内容回顾

1. 柯西中值定理;

2. 不定式的极限.

补充例题

例1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]\ (b>a>0)$ 上连续，在 (a,b) 上可导，证明 $\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{(b+a)f'(\eta)}{2\eta}$.

证 观察等式两边，令 $g(x)=x^2$，根据柯西中值定理，$\exists\,\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\eta)}{2\eta}(b+a)=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}(b+a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

再根据拉格朗日中值定理，$\exists\,\xi\in(a,b)$，即可得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(b+a)f'(\eta)}{2\eta}.$$

例2 设$0<a<b$，则存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b).$$

证 注意到

$$\frac{ae^b-be^a}{(a-b)}=\frac{\dfrac{ae^b-be^a}{ab}}{\dfrac{(a-b)}{ab}}=\frac{\dfrac{e^b}{b}-\dfrac{e^a}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}.$$

令 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$，在$[a,b]$上用柯西中值定理，得到

$$\frac{\dfrac{e^b}{b}-\dfrac{e^a}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{\left(\dfrac{e^x}{x}\right)'\Bigg|_{x=\xi}}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'\Bigg|_{x=\xi}}=\frac{\dfrac{\xi e^{\xi}-e^{\xi}}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}=(1-\xi)e^{\xi}.$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$.

解 先对分子进行处理,

$$x^x - x = x(x^{x-1} - 1) = x(\mathrm{e}^{(x-1)\ln x} - 1)$$

$$\sim x(x-1)\ln x \quad (x\to 1)$$

$$\sim (x-1)\ln x \quad (x\to 1),$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\ln x}{\ln x - x + 1} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + \dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{1}{x} - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x + x - 1}{1 - x} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + 2}{-1} = -2.$$

例4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导. 证明 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi)$.

证 先将等式变形为

$$\frac{f''(\xi)}{4}=\frac{f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)}{(b-a)^2}.$$

令 $F(x)=f(x)-2f(\frac{a+x}{2})+f(a)$, $G(x)=(x-a)^2$, 则 $F(x),G(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足柯西中值定理条件, 且 $F(a)=G(a)=0$. 于是 $\exists\,\xi_1\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)}{(b-a)^2}=\frac{F(b)}{G(b)}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}$$

$$=\frac{f'(\xi_1)-f'(\frac{a+\xi_1}{2})}{2(\xi_1-a)}.$$

又 $f'(x)$ 在 $[\frac{a+\xi_1}{2},\xi_1]$ 上满足拉格朗日定理条件,故

$\exists\,\xi\in(\frac{a+\xi_1}{2},\xi_1)\subset(a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)}{(b-a)^2}=\frac{f'(\xi_1)-f'(\frac{a+\xi_1}{2})}{2(\xi_1-a)}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{f'(\xi_1)-f'(\frac{a+\xi_1}{2})}{(\xi_1-\frac{a+\xi_1}{2})}$$

$$=\frac{f''(\xi)}{4}.$$

$$\frac{f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)}{(b-a)^2}=\frac{f'(\xi_1)-f'(\frac{a+\xi_1}{2})}{2(\xi_1-a)}$$

例5 利用柯西中值定理证明不等式，

$$\tan x > x + \frac{x^3}{3}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

证 不等式可以化为 $\dfrac{\tan x}{x + \frac{x^3}{3}} > 1, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. 故取

$$f(x) = \tan x, \quad g(x) = x + \frac{x^3}{3},$$

$f(x), g(x)$在 $[0, t]$ $(0 < t < \frac{\pi}{2})$ 上满足柯西定理条件，

因此 $\exists \xi \in (0, x)$ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$，使得

$$\frac{\tan x - 0}{x + \frac{x^3}{3} - 0} = \frac{\sec^2 \xi}{1 + \xi^2} = \frac{1 + \tan^2 \xi}{1 + \xi^2} > 1.$$

$$(\because \tan x > x, \text{ 当 } x \in (0, \tfrac{\pi}{2}))$$