第二讲

数列极限的概念 2

再论“ε - N”定义

从定义及上面的例题我们可以看出:

1. ε 的任意性: 定义中的 ε 用来刻画数列 $\{a_n\}$ 的通项与定数 a 的接近程度. 显然正数 ε 愈小, 表示 a_n 与 a 接近的程度愈高; ε 是任意的, 这就表示 a_n 与 a 可以任意接近.

要注意, ε 一旦给出, 在接下来计算 N 的过程中, 它暂时看作是确定不变的.

此外，又因 ε 是任意正数，所以 $2\varepsilon, 3\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}, \cdots$ 等均可看作任意正数，故定义 1 中的不等式

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

可以用 $|a_n - a| < K\varepsilon$（K 为某一正常数）来代替。

再有，我们还可以限定 ε 小于某一个正数（比如 $\varepsilon < 1$）。事实上，对 $0 < \varepsilon < 1$ 若能验证 $\{a_n\}$ 满足定义 1，那么对 $\varepsilon \geq 1$ 自然也可以验证成立。

2. N 的相对性: 从定义1 中又可看出，随着 ε 的取值不同，N 当然也会不同. 但这并不意味着 N 是由 ε 唯一确定. 例如，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

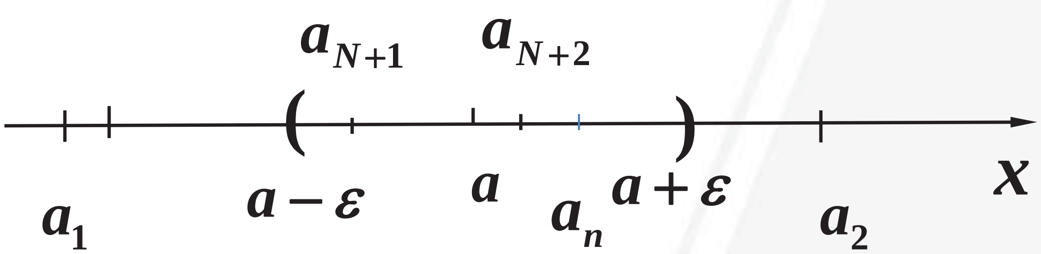
则当 $n > N_1 = 2N$ 时，对于同样的 ε，更应有

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

也就是说，在这里只是强调 N 的存在性，而不追求 N 的“最佳性”.

3. 极限的几何意义

从几何上看,“$n>N$ 时有 $|a_n-a|<\varepsilon$”,实际上就是所有下标大于 N 的 a_n 全都落在邻域 $U(a;\varepsilon)$之内,而在 $U(a;\varepsilon)$ 之外,$\{a_n\}$ 至多只有有限项(N 项).



反过来, 如果对于任意正数ε, 落在 $U(a;\varepsilon)$之外至多只有有限项, 设这些项的最大下标为 N, 这就表示当 $n>N$ 时, $a_n\in U(a;\ \varepsilon)$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

以上是定义 1 的等价说法, 写成定义就是:

定义1′

任给 $\varepsilon>0$, 若在 $U(a;\varepsilon)$ 之外至多只有$\{a_n\}$的有限多项, 则称数列$\{a_n\}$收敛于a.

这样, $\{a_n\}$ 不以 a 为极限的定义也可陈述为：存在 $\varepsilon_0>0$, 在 $(a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0)$ 外有 $\{a_n\}$ 中的无限多项.

注1　$\{a_n\}$无极限（即发散）的等价定义为:

$\{a_n\}$不以任何实数 a 为极限.

注2　数列$\{a_n\}$减少、增加、改变有限项的值,

不影响数列的敛散性，也不改变其极限值.

例如，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则数列$\{a_{n+k}\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+k}=a$.

4.无穷小数列和无穷大数列

定义2

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则称 $\{a_n\}$ 为无穷小数列.

例如 $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ 和 $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}$ 是无穷小数列.

当 $|q|<1$ 时, $\{q^n\}$ 是无穷小数列.

以下定理显然成立, 请读者自证.

定理2.1

数列$\{a_n\}$收敛于a的充要条件是:

$\{a_n - a\}$ 是无穷小数列.

定义3

设 $\{a_n\}$ 是一数列，若对任意 $G>0$，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有 $|a_n|>G$，则称 $\{a_n\}$ 是无穷大数列，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

若 $|a_n|>G$，改为 $a_n>G$ 或 $a_n<-G$，则称 $\{a_n\}$ 是正无穷大数列或负无穷大数列，分别记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

例如，

$\{n\}$,是正无穷大数列.

$\{-2^n\}$是负无穷大数列.

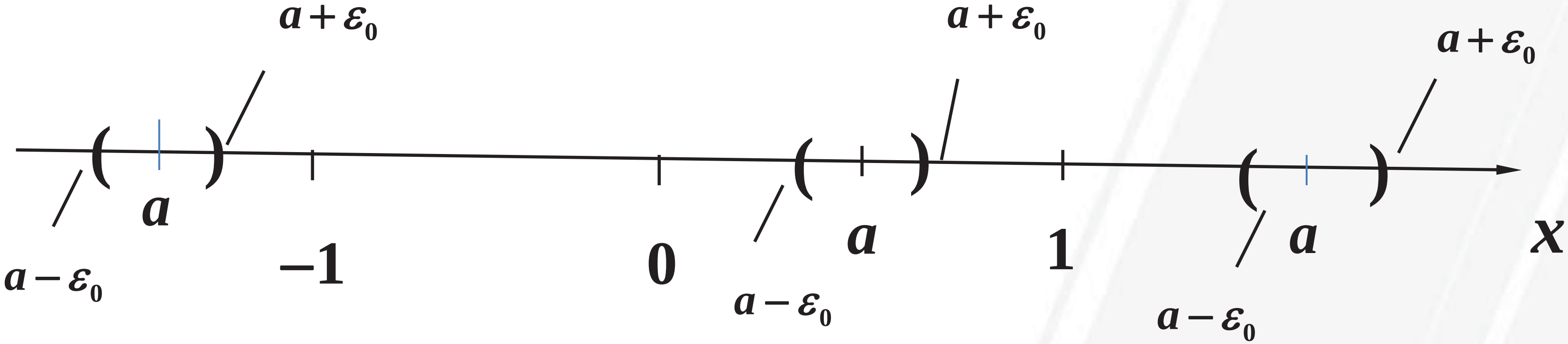
数列$\left\{\left(1+(-1)^n\right)n\right\}$虽然无界，

但不是无穷大数列.

一些例子

为了更好地理解“$\varepsilon - N$”定义，再举一些例题.

例1 证明$\{(-1)^n\}$发散.



证 对于任意实数 a, 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$, 使$\{a_n\}=\{(-1)^n\}$ 满足当$a\le 0$时$\left(\text{当}a\ge 0\text{时}\right)$, 在$\left(a-\frac{1}{2},\ a+\frac{1}{2}\right)$外有无限多项, 即偶数项 (即奇数项).

所以由定义1′, $\{a_n\}$ 不以 a 为极限.

又因 a 是任意的, 所以$\{a_n\}$发散.

例2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0.$

解 $|a|>1$ 时，$\forall\varepsilon>0$，取 $N=\dfrac{|a|^{[|a|]+1}}{\varepsilon[|a|]!}$，当 $n>N$ 时，

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{\overbrace{|a|\cdots|a|}^{[|a|]}\ \overbrace{|a|\cdots|a|}^{n-[|a|]}}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot[|a|]\cdot[|a|+1]\cdot\cdots\cdot n}\le\frac{|a|^{[|a|]}}{[|a|]!}\cdot\frac{|a|}{n}<\varepsilon.$$

当 $0<|a|\le1$ 时，取 $N=\dfrac{1}{\varepsilon}$，当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|\le\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0.$

注 这里我们将 N 取为正数, 而非正整数. 实际上 N 只是表示某个时刻, 保证从这一时刻以后的所有项都能使不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立即可.

例3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$.

证 我们用两种方法来证明.

1) 任给正数 ε, 取 $N = \frac{1}{\varepsilon}$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \sin\frac{1}{n} - 0 \right| \le \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

2) 任给正数ε, 限制 $\varepsilon<1$. 由

$$\left|\sin\frac{1}{n}-0\right|=\sin\frac{1}{n}<\sin(\arcsin\varepsilon)=\varepsilon,$$

可知只需取 $N=\dfrac{1}{\arcsin\varepsilon}$ 即可.

注 这里假定 $0<\varepsilon<1$ 是必要的, 否则 $\arcsin\varepsilon$ 便没有定义.

例4 证明 $\left\{\dfrac{n^2+1}{n+1}\right\}$ 是正无穷大数列.

证 任给正数 M，要使 $\dfrac{n^2+1}{n+1}>M$. 注意到

$$\frac{n^2+1}{n+1}>\frac{n^2}{2n}=\frac{n}{2}$$

可知只需取 $N=2M$, 当 $n>N$ 时,

$$\frac{n^2+1}{n+1}>\frac{n}{2}>M$$

由定义该数列是无穷大数列.