CH5 曲线拟合和函数逼近

§1 最小二乘原理和多项式拟合

§2 一般最小二乘拟合

§3 正交多项式曲线拟合

§4 最佳平方逼近

给出一组离散点，确定一个函数逼近原函数，插值是的一种手段。但在实际问题中，数据不可避免的会有误差，插值函数会将这些误差也包括在内。因此，我们需要一种新的逼近原函数的手段：

①不要求过所有的点（可以减小误差影响）；

②尽可能表现数据的趋势，靠近这些点。

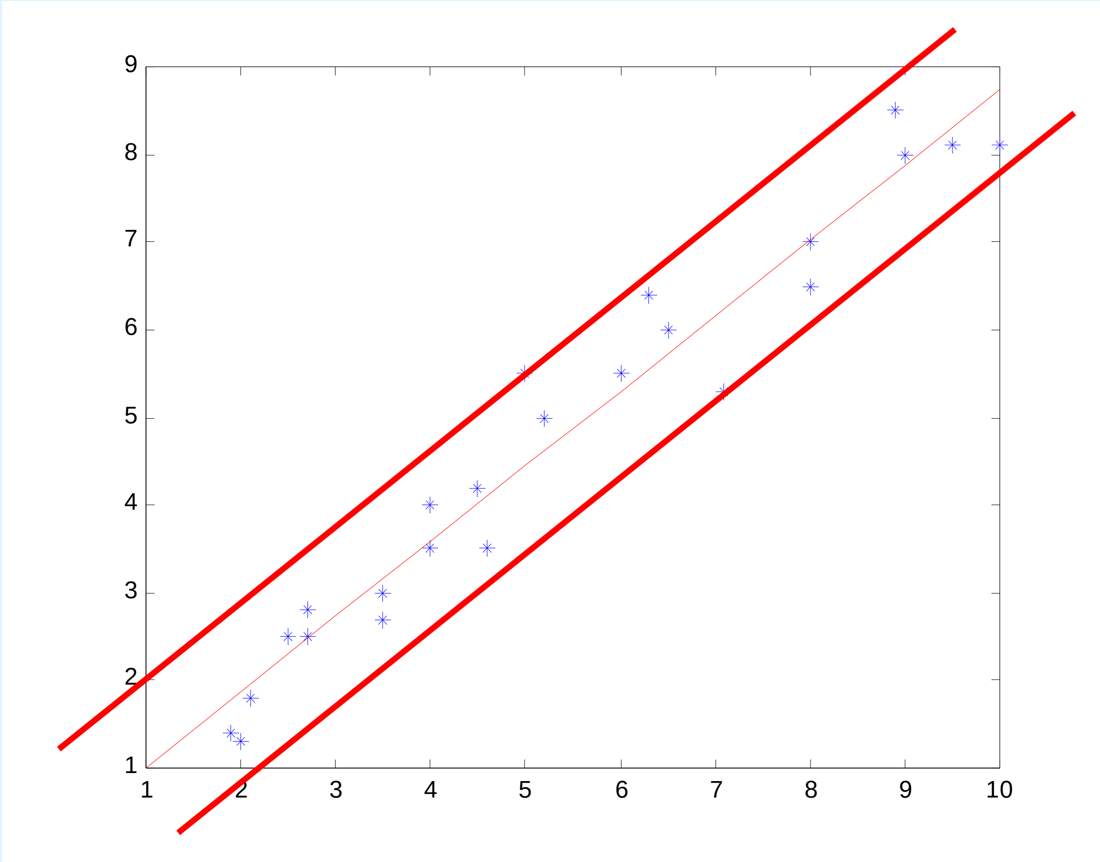
如：**5**个风景点，要修一条公路主干道**S**使得**S**为直线，且到所有风景点的距离和最小，而不要求公路通过所有的风景点。

§1 最小二乘法

实例：考察某种纤维的强度与其拉伸倍数的关系,下表是实际测定的24个纤维样品的强度与相应的拉伸倍数的记录:

编号	拉伸倍数(x)	强度(y)	编号	拉伸倍数(x)	强度(y)	编号	拉伸倍数(x)	强度(y)
1	1.9	1.4	**9**	5	5.5	**17**	4	4
2	2	1.3	**10**	5.2	5	**18**	4	3.5
3	2.1	1.8	**11**	6	5.5	**19**	4.5	4.2
4	2.5	2.5	**12**	6.3	6.4	**20**	4.6	3.5
5	2.7	2.8	**13**	6.5	6	**21**	8.9	8.5
6	2.7	2.5	**14**	7.1	5.3	**22**	9	8
7	3.5	3	**15**	8	6.5	**23**	9.5	8.1
8	3.5	2.7	**26**	8	7	**24**	10	8.1

纤维强度随拉伸倍数增加而增加，并且**24**个点大致分布在一条直线附近，因此可以认为强度***y***与拉伸倍数***x***的主要关系应是线性关系。



$$\boxed{y(x)=\beta_0+\beta_1 x}$$ ----------**(1)**　其中β_0,β_1为待定参数

找一种度量标准来衡量什么曲线最接近所有数据点

一、最小二乘法原理

令 $\delta_i = y(x_i) - y_i$ 在回归分析中称为残差

一般使用

$$\|\delta\|_2^2 = \sum_{i=0}^{m} \delta_i^2 = \sum_{i=0}^{m} (y(x_i) - y_i)^2$$ 称为平方误差

作为衡量$y(x)$与数据点(x_i, y_i)偏离程度大小的度量标准

从而确定(1)中的待定系数，求解$y(x)$。

二、线性最小二乘拟合

1. 基本思想

给定 $(x_i, y_i)(i=0,1,\cdots,m)$，设x,y的关系为 $y=S(x)$

其中$S(x)$来自函数类Φ　　如(1)中$y(x)$来自线性函数类

设函数类Φ的基函数为$\varphi_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$ 一般要求$n\le m$

$$\Phi = span\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}$$

$$S(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)\cdots+a_n\varphi_n(x)\in\Phi$$

仍然定义平方误差 $\|\delta\|_2^2=\sum_{i=0}^{m}\delta_i^2=\sum_{i=0}^{m}(S(x_i)-y_i)^2$

$$\|\delta^*\|_2^2=\sum_{i=0}^{m}(S^*(x_i)-y_i)^2$$

$$=\min_{S(x)\in\Phi}\|\delta\|_2^2=\min_{S(x)\in\Phi}\sum_{i=0}^{m}(S(x_i)-y_i)^2 \quad \text{---------(2)}$$

称满足条件(2)的求函数 $S^*(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j^*\varphi_j(x)$的方法为线性最小二乘拟合。

$S^*(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j^*\varphi_j(x)$为最小二乘解

$S(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)$为拟合函数,$a_j(j=0,1,\cdots,n)$为拟合系数

$\|\delta^*\|_2$称为最小二乘解的最小偏差。

2. 法方程组

由 $$S(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)$$

可知 $$\|\delta\|_2^2=\sum_{i=0}^{m}(\boxed{S(x_i)}-y_i)^2=\sum_{i=0}^{m}(\boxed{\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x_i)}-y_i)^2$$

为拟合系数$a_j(j=0,1,\cdots,n)$的函数

二次函数

因此可假设

$$\psi(a_0,a_1,\cdots,a_n)=\sum_{i=0}^{m}(\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x_i)-y_i)^2$$

因此求最小二乘解转化为

求$\psi(a_0,a_1,\cdots,a_n)$的最小值点 $a_0^*,a_1^*,\cdots,a_n^*$ 的问题

由多元函数取极值的必要条件

$$\frac{\partial \psi(a_0, a_1, \cdots, a_n)}{\partial a_k} = 0 \qquad k = 0, 1, \cdots, n$$

得
$$\frac{\partial \psi}{\partial a_k} = \sum_{i=0}^{m} [2(\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) - y_i) \varphi_k(x_i)] = 0$$

即
$$\sum_{i=0}^{m} [\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i) - y_i \varphi_k(x_i)] = 0$$

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i) = \sum_{i=0}^{m} y_i \varphi_k(x_i)$$

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) = \sum_{i=0}^{m} y_i \varphi_k(x_i)$$

$$\sum_{j=0}^{n}[\sum_{i=0}^{m} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)]a_j = \sum_{i=0}^{m} y_i \varphi_k(x_i)$$

$$k = 0,1,\cdots,n \qquad \text{---------(4)}$$

即

$$a_0\sum_{i=0}^{m}\varphi_0(x_i)\varphi_k(x_i) + a_1\sum_{i=0}^{m}\varphi_1(x_i)\varphi_k(x_i) + \cdots + a_n\sum_{i=0}^{m}\varphi_n(x_i)\varphi_k(x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{m} y_i \varphi_k(x_i) \qquad k = 0,1,\cdots,n$$

显然(4)是一个关于$\boldsymbol{a_0, a_1, \cdots, a_n}$的$\boldsymbol{n+1}$元线性方程组

引入记号 $\varphi_r = (\varphi_r(x_0), \varphi_r(x_1), \cdots, \varphi_r(x_m))$

$$\vec{y} = (y_0, y_1, \cdots, y_m)$$

则由内积的概念可知

$$(\varphi_k, \varphi_j) = \sum_{i=0}^{m} \varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i) \qquad \text{----------(5)}$$

$$(\varphi_k, \vec{y}) = \sum_{i=0}^{m} \varphi_k(x_i) y_i \qquad \text{----------(6)}$$

显然内积满足交换律 $(\varphi_k, \varphi_j) = (\varphi_j, \varphi_k)$

方程组(4)便可化为

$$a_0(\varphi_k,\varphi_0)+a_1(\varphi_k,\varphi_1)+\cdots+a_n(\varphi_k,\varphi_n)=(\varphi_k,f)$$

$$k=0,1,\cdots,n \qquad \text{----------(7)}$$

这是一个系数为(φ_k,φ_j),常数项为(φ_k,f)的线性方程组

将其表示成矩阵形式

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\(\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\(\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\ \vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\varphi_0,f)\\(\varphi_1,f)\\ \vdots\\(\varphi_n,f)\end{pmatrix} \qquad \text{------(8)}$$

记

$$G=\begin{bmatrix}\varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0)\\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varphi_n(x_m) & \varphi_1(x_m) & \cdots & \varphi_n(x_m)\end{bmatrix}$$

$$\vec{a}=(a_0,a_1,\cdots,a_n)^T,\quad \vec{y}=(y_0,y_1,\cdots,y_n)^T$$

则(8)可表示为 $G^T G\vec{a}=G^T\vec{y}$

称(8)式为函数序列 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$

在点 $x_0,x_1,\cdots,x_m$ 上的法方程组

几点备注：

1、法方程组$G^T Ga = G^T y$一定有解！

证明：即证 $R(G^T G) = R(G^T G, G^T y)$

利用线性代数知识易证关于矩阵的秩成立：

$$R(G) = R(G^T) = R(G^T G)$$

又由关于秩的不等式得：

$$R(G^T G) \le R(G^T G, G^T y) = R\left(G^T (G, y)\right) \le R(G^T) = R(G^T G)$$

从而 $R(G^T G) = R(G^T G, G^T y)$

2 设法方程组$G^T Ga = G^T y$的解为 $\vec{a}^* = (a_0^*, a_1^*, \cdots, a_n^*)^T \in R^{n+1}$

则函数 $s^*(x) = a_0^* \varphi_0(x) + a_1^* \varphi_1(x) + \cdots + a_n^* \varphi_n(x)$ 就是最小二乘解！

证明 设 $s(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$

则 $$Q = \sum_{i=0}^{m} \left(s(x_i) - y_i \right)^2 = \left\| \begin{pmatrix} s(x_0) - y_0 \\ s(x_1) - y_1 \\ \vdots \\ s(x_m) - y_m \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} s(x_0) \\ s(x_1) \\ \vdots \\ s(x_n) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \left\| G\vec{a} - y \right\|_2^2$$

因此最小二乘问题等价为：求$a \in R^{n+1}$，使得

$$Q = \left\| G\vec{a} - y \right\|_2^2 = \min$$

又因为对$\forall \vec{a} \in R^{n+1}$， $\vec{a} = \vec{a}^* + \vec{c}$

因此 $\|Ga-y\|_2^2=\|G(a^*+c)-y\|_2^2=\|Ga^*-y+Gc\|_2^2$

$$=\left(Ga^*-y+Gc\right)^T\left(Ga^*-y+Gc\right)$$

$$=\|Ga^*-y\|_2^2+2c^TG^T(Ga^*-y)+\|Gc\|_2^2$$

$$=\|Ga^*-y\|_2^2+2c^T\left(G^TGa^*-G^Ty)\right)+\|Gc\|_2^2$$

$$=\|Ga^*-y\|_2^2+\|Gc\|_2^2\geq\|Ga^*-y\|_2^2$$

即：　法方程组的解a^*使得$Q=\sum_{i=0}^{n}\left(s(x_i)-y_i\right)^2$达到最小！

3　最小二乘解的唯一性

当$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$线性无关时，则矩阵$G=\left(\varphi_0\ \ \varphi_1\cdots\ \varphi_n\right)$列满秩

此时G^TG可逆，法方程$G^TGa=G^Ty$有唯一解：$a^*=\left(G^TG\right)^{-1}G^Ty$

最小二乘问题有唯一解！

3. 最小二乘多项式拟合

用多项式 $S(x)=P_n(x)$作为$(x_i,y_i)(i=0,1,\cdots,m)$的拟合函数，它的基函数为

$$\varphi_0(x)=1,\quad \varphi_1(x)=x,\quad \cdots,\varphi_k(x)=x^k,\cdots,\ \varphi_n(x)=x^n$$

. . . .

$$(\varphi_k,\varphi_j)=\sum_{i=0}^{m}\varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i)=\sum_{i=0}^{m}x_i^k x_i^j=\sum_{i=0}^{m}x_i^{k+j}$$

$$(\varphi_k,\vec{y})=\sum_{i=0}^{m}\varphi_k(x_i)y_i=\sum_{i=0}^{m}x_i^k y_i$$

则最小二乘多项式拟合的法方程组为

$$\begin{bmatrix} m+1 & \sum_{i=0}^{m} x_i & \cdots & \sum_{i=0}^{m} x_i^n \\ \sum_{i=0}^{m} x_i & \sum_{i=0}^{m} x_i^2 & \cdots & \sum_{i=0}^{m} x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=0}^{m} x_i^n & \sum_{i=0}^{m} x_i^{n+1} & \cdots & \sum_{i=0}^{m} x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m} y_i \\ \sum_{i=0}^{m} y_i x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{m} y_i x_i^n \end{bmatrix}$$

--------------- (9)

最小二乘拟合多项式的存在唯一性

定理1 设点 $x_0, x_1, \ldots, x_m$ 互异，则法方程组(9)的解存在且唯一。

定理2 设 $a_k (k = 0,1,\cdots n)$ 是法方程组(9)的，则

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$ 是最小二乘拟合多项式，即

$$\sum_{i=0}^{m} [\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k - y_i]^2 \le \sum_{i=0}^{m} [\sum_{k=0}^{n} b_k x_i^k - y_i]^2, \forall b_k \in R$$

例1. 回到本节开始的实例，从散点图可以看出

纤维强度和拉伸倍数之间近似与线性关系

故可选取线性函数

$$y(x) = a_0 + a_1 x$$

为拟合函数，其基函数为

$$\varphi_0(x) = 1 \qquad \varphi_1(x) = x$$

建立法方程组

根据内积公式，可得

$(\varphi_0,\varphi_0)=24$ $\quad(\varphi_0,\varphi_1)=127.5$ $\quad(\varphi_1,\varphi_1)=829.61$

$(\varphi_0,\vec{y})=113.1$ $\quad(\varphi_1,\vec{y})=731.6$

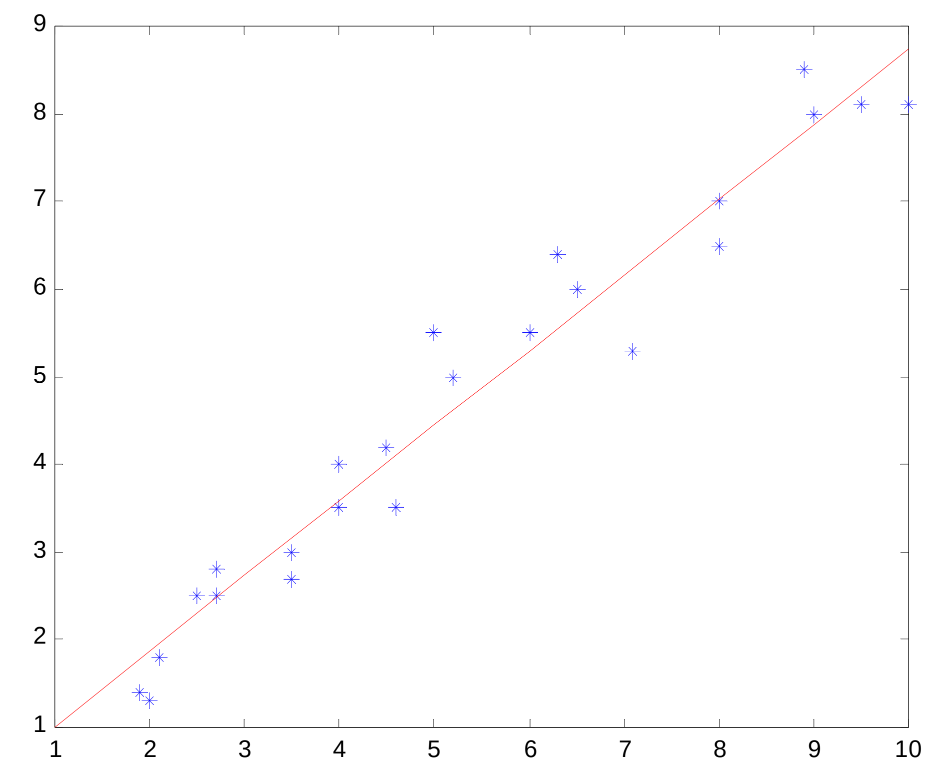
$$\begin{pmatrix} 24 & 127.5 \\ 127.5 & 829.61 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 113.1 \\ 731.6 \end{pmatrix}$$

解得 $a_0=0.1505$ $\quad a_1=0.8587$

$y^*(x)=0.1505+0.8587x$ 即为所求的最小二乘解

最小偏差为 $\|\delta^*\|_2=\sqrt{5.6615}=2.3794$

拟合曲线与散点的关系如下图：



例2. 求拟合下列数据的最小二乘解

y=.23 - -.29 .24.56 1

解: 从数据的散点图可以看出

$$\varphi_0(x)=\ln x \qquad \varphi_1(x)=\cos x \qquad \varphi_2(x)=e^x$$

$$S(x)=a\ln x+b\cos x+ce^x$$

通过计算,得法方程组的系数矩阵及常数项矩阵为

$$\begin{pmatrix} & -5.3475 & 63.2589 \\ -5.3475 & 5.1084 & -49.0086 \\ 63.2589 & -49.0086 & 1002.5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1.6163 \\ -2.3827 \\ 26.7728 \end{pmatrix}$$

用**Gauss**列主元消去法,得 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1.0410} \\ \mathbf{-1.2613} \\ \mathbf{0.030735} \end{pmatrix}$

y关于x的最小二乘解是

$$S^*(x) = -1.0410\ln x - 1.2613\cos x + 0.030735e^{x}$$

拟合的最小偏差为

$$\|\delta^*\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{m}(S^*(x_i) - y_i)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=0}^{m}(-1.0410\ln x_i - 1.2613\cos x_i + 0.030735e^{x_i} - y_i)^2}$$

$$= \sqrt{0.92557} = 0.9621$$

例3. 求拟合下列数据的最小二乘解(用二次多项式)

$x=$	-2	-1	0	1	2
$y=$	0	-2	-1	1	2

练习

解得最小二乘拟合为：

$$P(x) = -1 + \frac{7}{10}x + \frac{1}{2}x^2$$

三、非线性最小二乘拟合

思想：非线性——线性化

例如　对拟合函数 $y = ae^{b/x}$

两边取对数

$$\ln y = \ln a + \ln e^{b/x} = \ln a + b/x$$

$$\bar{y} = \ln y,\ \bar{a} = \ln a$$

$$\bar{x} = 1/x$$

$$\bar{y} = \bar{a} + b\bar{x}$$

例4. 在某化学反应里,测得生成物浓度y%与时间t的数据如下，试建立y关于t的经验公式

t=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16

y=4.00, 6.40, 8.00, 8.80, 9.22, 9.50, 9.70, 9.86, 10.00, 10.20,10.32,10.42,10.50,10.55,10.58,10.60

解: 画出时间t与浓度y的散点图

具有图示的图形的曲线很多，本题特提供两种形式

指数函数形式 $y = ae^{b/t}$ $\qquad \ln y = \ln a + b\dfrac{1}{t}$

双曲线形式 $y = \dfrac{t}{at+b}$ $\qquad \dfrac{1}{y} = a + b\dfrac{1}{t}$

其中a,b都是待定系数

(1).指数函数形式 $y = ae^{b/t}$

两边取对数,得 $\ln y = \ln a + b\dfrac{1}{t}$

设$y' = \ln y, t' = \dfrac{1}{t}, a' = \ln a$

得 $y' = a' + bt'$ 即为拟合函数

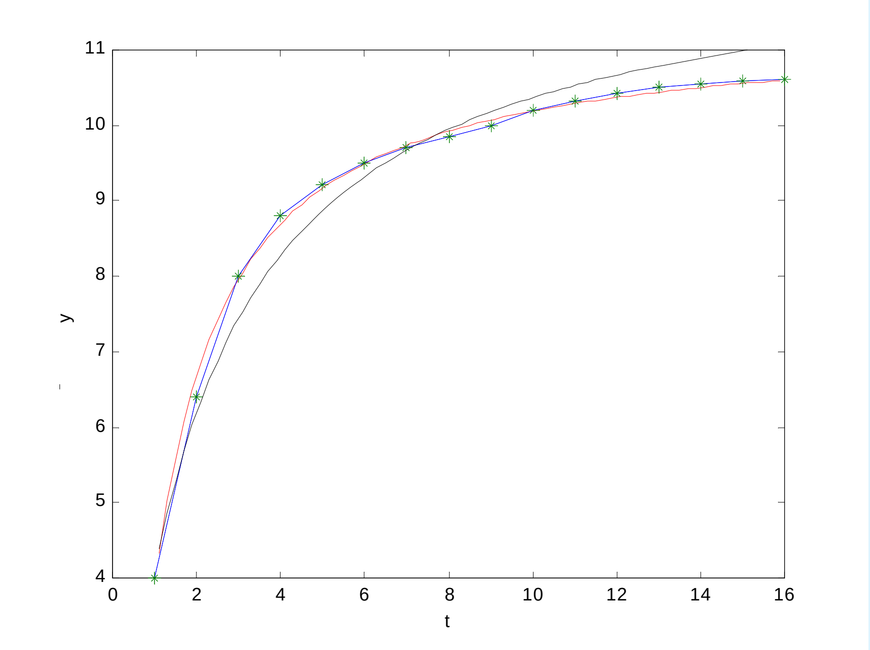
基函数为 $\varphi_0(t') = 1,\quad \varphi_1(t') = t'$

解法方程组得 $\boldsymbol{a' = -4.48072, b = -1.0567} \longrightarrow \boldsymbol{a} = 0.011325$

最小二乘解 $\boldsymbol{y = 0.011325e^{-1.0567/t}}$

平方误差为 $\|\delta_1 *\|_2^2 = \mathbf{0.11631}$

(2). 双曲线形式 $y=\dfrac{t}{at+b}$



$$\frac{1}{y}=a+b\frac{1}{t}$$

用最小二乘法得

$$a=0.080174 \quad b=0.16272$$

即 $$y=\frac{t}{0.080174\ t+0.16272}$$

平方误差为 $\|\delta_2{}^*\|_2^2=1.5621$

无论从图形还是从平方误差考虑，在本例中指数函数拟合比双曲线拟合要好。

四、利用最小二乘原理求解矛盾方程组(不相容)

例如　求不相容方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 = 3 \\ -3x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

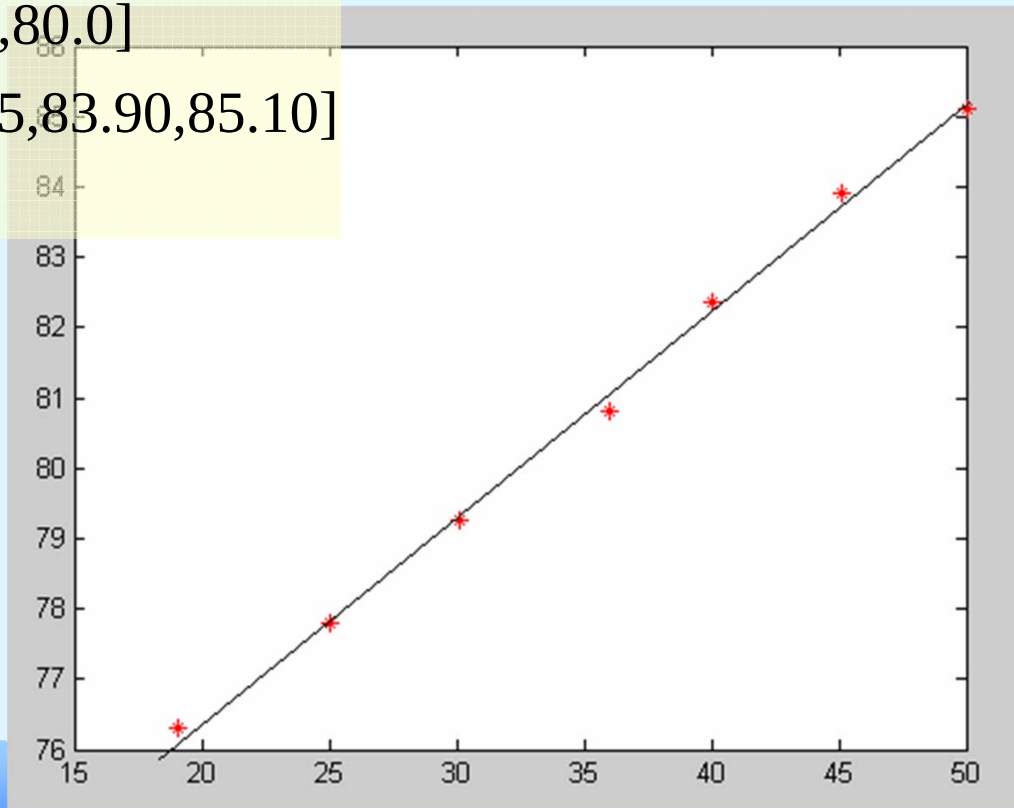
应用求解举例

例1 测得温度t和铜导线电阻R的关系数据表，试确定R和t的近似表达式.

t	19.1	25.0	30.1	36.0	40.0	45.1	80.0
R	76.30	77.80	79.25	80.80	82.35	83.90	85.10

解 利用Matlab作图：

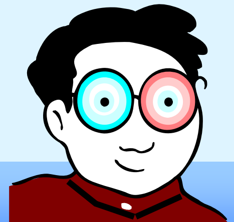
```
x=[19.1,25.0,30.1,36.0,40.0,45.1,80.0]
y=[76.30,77.80,79.25,80.80,82.35,83.90,85.10]
plot(x,y,'*')
```



易见R,t之间存在线性关系

$$R = a_0 + a_1 t$$

所以 $\varphi_0(t) = 1, \varphi_1(t) = t$



t	19.1	25.0	30.1	36.0	40.0	45.1	80.0
R	76.30	77.80	79.25	80.80	82.35	83.90	85.10

$\varphi_0(t)=1$

$\varphi_1(t)=t$

$$G=(\varphi_0,\varphi_1)=\begin{pmatrix}1 & 19.1\\ 1 & 25.0\\ 1 & 30.1\\ 1 & 36.0\\ 1 & 40.0\\ 1 & 45.1\\ 1 & 50.0\end{pmatrix}\quad R=\begin{pmatrix}76.30\\ 77.80\\ 79.25\\ 80.80\\ 82.35\\ 83.90\\ 85.10\end{pmatrix}\quad G^TG=\begin{pmatrix}1 & 19.1\\ 1 & 25.0\\ 1 & 30.1\\ 1 & 36.0\\ 1 & 40.0\\ 1 & 45.1\\ 1 & 50.0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1 & 19.1\\ 1 & 25.0\\ 1 & 30.1\\ 1 & 36.0\\ 1 & 40.0\\ 1 & 45.1\\ 1 & 50.0\end{pmatrix}$$

法方程组 $G^TGa=G^TR \Leftrightarrow \begin{pmatrix}7 & 245.3\\ 245.3 & 9325.83\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}565.5\\ 20029.445\end{pmatrix}$

解得 $a_0=70.572, a_1=0.291$

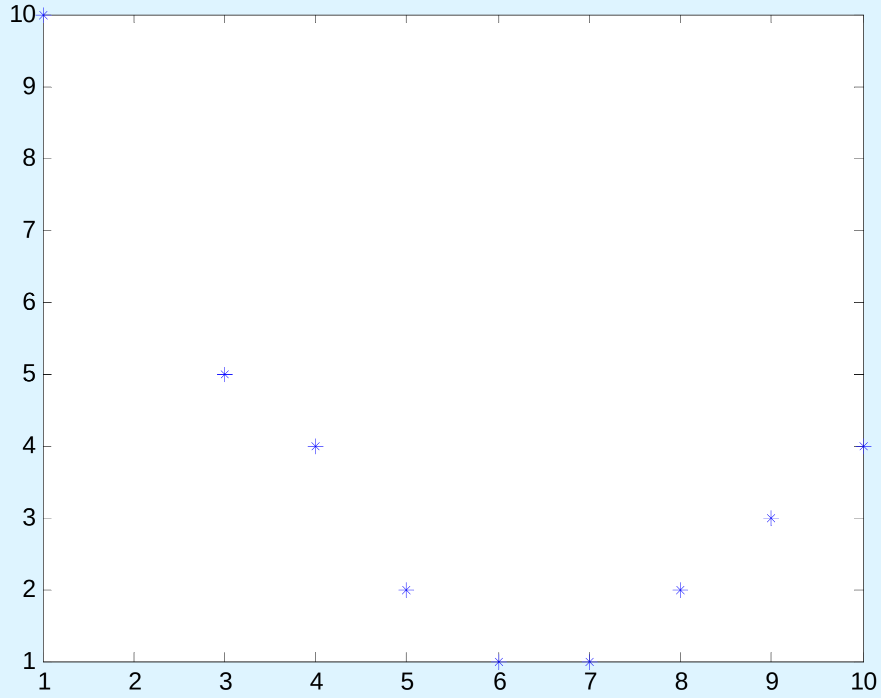
所以 $R=70.572+0.291t$

例2 已知一组实验数据如下，求它的拟合曲线.

x	1	3	4	5	6	7	8	9	10
y	10	5	4	2	1	1	2	3	4

解 利用Matlab作图：

```
x=[1,3,4,5,6,7,8,9,10]
y=[10,5,4,2,1,1,2,3,4]
plot(x,y,'*')
```



可见它近似为一条抛物线.

设$y=a_0+a_1x+a_2x^2$,则

$$\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x,\varphi_2(x)=x^2$$

$$G=(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&9\\1&4&16\\1&5&25\\1&6&36\\1&7&49\\1&8&64\\1&9&81\\1&10&100\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}10\\5\\4\\2\\1\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$G^TG=\begin{pmatrix}9&53&381\\53&381&3017\\381&3017&25317\end{pmatrix}$$

$$G^Ty=\begin{pmatrix}32\\147\\1025\end{pmatrix}$$

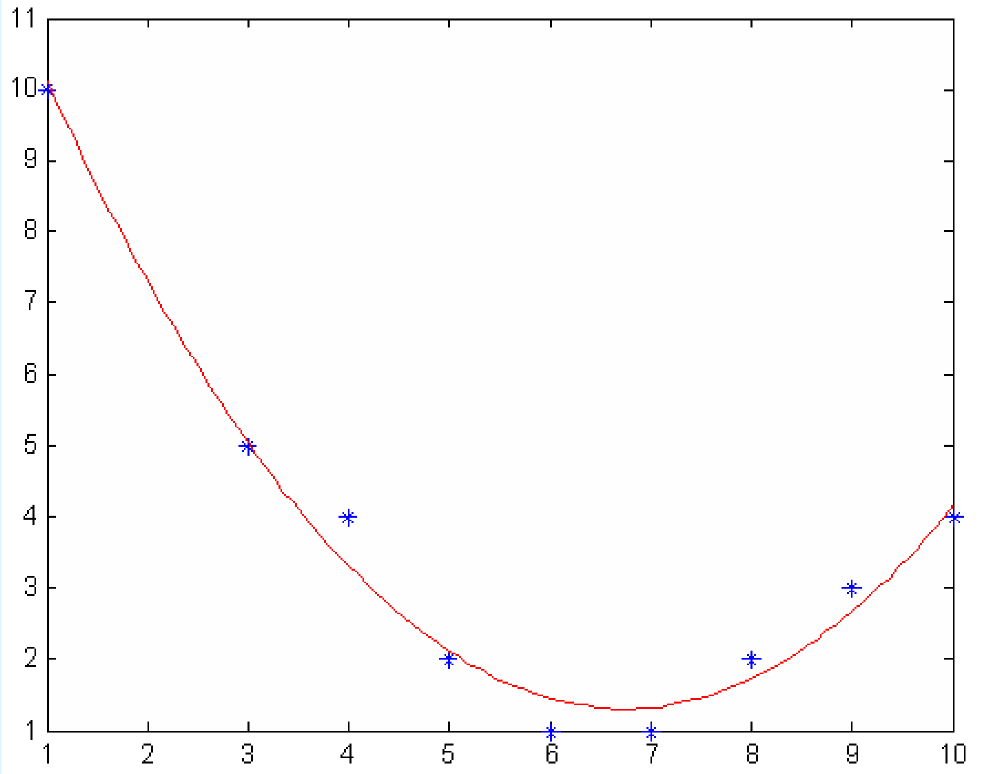
由法方程组:$G^TGa=G^Ty$，解得

$$a_0=13.45966,a_1=-3.60531,\ \ a_2=0.26757$$

所以 $$y=13.45966-3.60531x+0.26757x^2$$

✓ Matlab中多项式曲线拟合命令

```
x=[1,3,4,5,6,7,8,9,10]; %拟合数据
y=[10,5,4,2,1,1,2,3,4];
n=2; %拟合多项式的次数
p=polyfit(x,y,n); %拟合多项式
xi=linspace(1,10);
yi=polyval(p,xi);
plot(x,y,'*',xi,yi,'r');
```



运行结果：

p =   0.2676   -3.6053   13.4597

$(y=0.2676x^2-3.6053x+13.4597)$

例3 对彗星1968Tentax的移动在某个极坐标系下的观察数据如下

r	2.70	2.00	1.61	1.20	1.02
φ	48°	67°	83°	108°	126°

假设忽略来自行星的干扰，坐标应满足$r=\dfrac{p}{1-e\cos\varphi}$，其中$p$为参数，$e$为偏心率.试用最小二乘法拟合$p$和$e$，并给出平方误差.

解 【本问题是非线性曲线拟合】

由于r关于p和e是非线性的，变形为$\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{e}{p}\cos\varphi$，可得下表数据

$y=\dfrac{1}{r}$	0.370370	0.500000	0.621118	0.833333	0.980392
$t=\cos\varphi$	0.669131	0.390731	0.121869	−0.309017	−0.587785

记$a=\dfrac{1}{p}, b=-\dfrac{e}{p}$得拟合模型：$y=a+bt$

解法方程组得：$a=0.688617, b=-0.483880$

平方误差：

$$\delta^2=\sum_{j=0}^{4}\left(r_j-r(\varphi_j)\right)^2=0.002262$$

所以$p=\dfrac{1}{a}=1.452186, e=-bp=0.702684$，$r=\dfrac{1.452186}{1-0.702684\cos\varphi}$

§3 正交多项式曲线拟合

§4 最佳平方逼近

一、函数的最佳逼近

给定 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\in C[a,b]$ 线性无关

$$\Phi=span\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}$$

对 $f(x)\in C[a,b]$在$\boldsymbol{\Phi}$中找 $\varphi^*(x)$使得

$$\|f(x)-\varphi^*(x)\|=\min\|\varphi(x)-f(x)\|$$

称 $P^*(x)$ 为 $f(x)$在$[a,b]$上的最佳逼近函数。

例如 $\|f(x)-\varphi^*(x)\|_\infty=\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)-\varphi(x)|=\min$

$$\|f(x)-\varphi^*(x)\|_2=\sqrt{\int_a^b[f(x)-\varphi(x)]^2dx}=\min$$

预备知识：连续函数空间$C[a,b]$

1. 函数的内积

1) 定义1　设在区间$[a,b]$上的非负函数$\rho(x)$满足：

$$(1)\quad \int_a^b |x|^n \rho(x)dx \text{ 存在 } (n=0,1,\cdots)$$

$$(2)\quad \int_a^b \rho(x)dx > 0$$

则称$\rho(x)$为$[a,b]$上的权函数(权)。

定义2 设 $f(x), g(x) \in C[a,b], \rho(x)$ 是[a,b]上的权函数，则积分 $(f,g)=\int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx$ 称为函数 $f(x)$,$g(x)$在[a,b]上以$\rho(x)$为权函数的内积。定义了内积运算的连续函数空间称为内积空间。

2)内积的性质

(1) $(f,f) \geq 0$, 且$(f,f)=0 \Leftrightarrow f=0$;

(2) $(f,g)=(g,f)$;

(3) $(f_1+f_2,g)=(f_1,g)+(f_2,g)$;

(4) $(kf,g)=k(f,g)$，其中$k \in R$.

2. 正交函数族

定义3 如果$f(x), g(x)\in C[a, b]$，且满足：

$$\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx=0$$

则称$f(x)$与$g(x)$在$[a, b]$上关于权$\rho(x)$正交；

若$[a, b]$上的连续函数系$\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots\varphi_k(x),\cdots\}$ 满足

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x)dx=\begin{cases}0, & j\neq k\\ A_k>0, & j=k\end{cases}$$

则称 $\{\varphi_k(x)\}$是$[a, b]$上带权$\rho(x)$的正交函数族；

若[*a*, *b*]上的连续函数系$\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots\varphi_k(x),\cdots\}$ 满足

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x)dx=\begin{cases}0, & j\neq k\\ A_k>0, & j=k\end{cases}$$

则称 $\{\varphi_k(x)\}$是[*a*, *b*]上带权*ρ*(*x*)的正交函数族；

$A_k\equiv 1$ 时，$\{\varphi_k(x)\}$为标准正交函数族；

如：1， cos*x*， sin*x*， cos2*x*， sin2*x*， …， con*nx*， sin*nx*， … 是$[-\pi,\pi]$的正交函数族！

$\varphi_k(x)$是首项次数不为零的*k*次多项式时，$\{\varphi_k(x)\}$为[*a*, *b*]上带权*ρ*(*x*)的正交多项式系。

正交多项式的性质

(1) 区间[a,b]上关于权$\rho(x)$的n次正交多项式与任意次数小于n的多项式在[a,b]上带权$\rho(x)$ 正交；

(2) 区间[a,b]上的n次正交多项式有n个互异的实零点，且全在[a,b]内。

3. 函数的范数

1) 定义 设$\|\cdot\|$是线性空间$C[a,b]$到非负实数$\mathbf{R}^+$上的一个映射，如果满足：

(1) $\|f\|\geq 0$，且$\|f\|=0 \Leftrightarrow f=0$，$\forall f\in C[a,b]$;

(2) $\|\alpha f\|=|\alpha|\,\|f\|$，$\forall f\in C[a,b], \forall \alpha\in R$;

(3) $\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|, \forall f,g\in C[a,b]$

则称$\|\cdot\|$为$C[a,b]$上的范数。

2) 常用范数

$$\|f\|_\infty=\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|$$ ——∞范数或最大值范数；

$$\|f\|_2=\sqrt{(f,f)}$$ ——2范数或欧式范数；

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$$ ——1范数.

3) 勾股定理

如果$f(x)$与$g(x)$正交，即$(f,g)=0$，则$\|f+g\|_2=\|f\|_2+\|g\|_2$。

4) $C[a,b]$中的距离

设$f,g\in C[a,b]$，称$d(f,g)=\|f-g\|_\alpha\ (\alpha=1,2,\infty)$为$f,g$之间的距离.

4. 勒让德(*Legendre*)多项式

当区间为[−1,1]，权函数$\rho(x)\equiv 1$时，由 $\{1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\}$正交化得到的多项式称为**Legendre多项式**(1785年引进的)，1814年Rodrigul给出了简单表达式。

$$P_0(x) = 1$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

其首项系数 $a_n = \dfrac{1}{2^n n!}[2n(2n-1)\cdots(n+1)] = \dfrac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$

$$P_0(x)=1$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]\quad(n=1,2,\cdots)$$

其首项系数 $a_n=\dfrac{1}{2^n n!}[2n(2n-1)\cdots(n+1)]=\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$

性质1 (正交性)

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0 & ,m\neq n,\\ \dfrac{2}{2n+1} & ,m=n.\end{cases}$$

性质2 (奇偶性) $P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$

性质3 (三项递推关系)

$P_0(x)=1$ $\quad$ $P_1(x)=x$

$$P_{n+1}(x)=\frac{1}{n+1}[(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)] \quad (n=1,2,\cdots)$$

则可得 $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$ $\quad$ $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$P_4=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$ $\quad$ $P_5=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$

$$P_6=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$$

性质4 对任意首项系数为1的n次多项式$f(x)$，Legendre 多项式满足：

$$\int_{-1}^{1}[\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}P_n(x)]^2dx \le \int_{-1}^{1} f^2(x)dx$$

即与零的平方误差最小

性质5 $P_n(x)$在[-1,1]上有n个不同的实零点。

例1　求$f(x)=2x^3+x^2-2x-1$在[-1,1]上二次最佳平方逼近多项式。

解　设$P^*(x)$为所求多项式，则

$$\int_{-1}^{1}[f(x)-P_2^*(x)]^2dx=\min_{P(x)\in H_2}\int_{-1}^{1}[f(x)-P_2(x)]^2dx$$

由性质4，应有

$$\frac{1}{2}[f(x)-P_2^*(x)]=\frac{2}{5}P_3(x)$$

其中
$$P_3(x)=\frac{5x^3-3x}{2}$$

所以
$$P_2^*(x)=f(x)-\frac{4}{5}P_3(x)=x^2-\frac{4}{5}x-1$$

5. 切比雪夫(*Chebyshev*)多项式

当区间为$[-1,1]$，权函数为$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$时,由$\{1,x,x^2,\cdots,x^n,\cdots\}$正交化后的多项式称为***Chebyshev*多项式**。它可以表示为

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),\quad |x|\le 1\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

若令 $x=\cos\theta$，则$T_n(x)=\cos n\theta,\ 0\le\theta\le\pi$

性质1 (正交性)

$\{T_n(x)\}$ 在$[-1,1]$上带权 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 正交，且

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0\ , & n\neq m,\\ \dfrac{\pi}{2}, & n=m\neq 0,\\ \pi, & n=m=0.\end{cases}$$

若令 $x=\cos\theta$，则$dx=-\sin\theta$，于是

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{0}^{\pi}\cos n\theta\cos m\theta d\theta=\begin{cases}0\ , & n\neq m,\\ \dfrac{\pi}{2}, & n=m\neq 0,\\ \pi, & n=m=0.\end{cases}$$

性质2 (三项递推关系)

$$T_0(x)=1 \qquad T_1(x)=x$$

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x) \quad (n=1,2,\cdots)$$

由三角恒等式 $\cos(n+1)\theta=2\cos\theta\cos n\theta-\cos(n-1)\theta$

令 $x=\cos\theta$，即可得

$$T_0(x)=1 \qquad T_1(x)=x$$

$$T_2(x)=2x^2-1 \qquad T_6=32x^6-48x^4+18x^2-1$$

$$T_3=4x^3-3x \qquad T_7=64x^7-112x^5+56x^3-7x$$

$$T_4=8x^4-8x^2+1 \qquad T_8=128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1$$

$$T_5=16x^5-20x^3+5x$$

性质3 $T_n(x)$对零的偏差最小

在区间[-1,1]上所有首项系数为1的n次多项式中，

$\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ 与零的偏差最小，且偏差为 $\frac{1}{2^{n-1}}$

例2 求$f(x)=2x^3+x^2-2x-1$ 在[-1,1]上的最佳一致逼近多项式。

性质4 $T_n(x)$在区间[-1,1]上有n个零点

$$x_k=\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right),\quad k=1,2,\cdots,n$$

二、函数的最佳平方逼近

问题：求 $\varphi^*(x)\in\Phi$，满足

$$\left\|f(x)-\varphi^*(x)\right\|_2^2=\min_{\varphi\in\Phi}\left\|f(x)-\varphi(x)\right\|_2^2$$

即

$$\int_a^b \rho(x)\left(f(x)-\varphi^*(x)\right)^2dx=\min_{\varphi(x)\in\Phi}\int_a^b \rho(x)\left(f(x)-\varphi(x)\right)^2dx$$

称 $\varphi^*(x)$ 是 $f(x)$的最佳平方逼近。

1. 最佳平方逼近函数的求法

假设$\varphi^*(x)$存在，考察$\{a_j^*\}$应满足必要条件

对$\varphi(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)\in\Phi$，令

$$Q(a_0,a_1,\cdots,a_n)=\|f-\varphi\|_2^2=\int_a^b \rho(x)\left[(f(x)-\varphi(x))\right]^2 dx$$

由多元函数取得极值的必要条件知：$\dfrac{\partial Q}{\partial a_i}=0\ (i=0,1,\cdots,n)$

即 $$\frac{\partial Q}{\partial a_i}=-2\int_a^b \rho(x)\left[f(x)-\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)\right]\varphi_i(x)dx=0\ (i=0,1,\cdots,n)$$

即 $$\int_a^b \rho(x)f(x)\varphi_i(x)dx=\int_a^b \rho(x)\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)\cdot\varphi_i(x)dx$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x)dx\cdot a_j\ (i=0,1,\cdots,n)$$

内积形式： $$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_i,\varphi_j)\cdot a_j=(f,\varphi_i)\ (i=0,1,\cdots,n)$$

$$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_i,\varphi_j)\cdot a_j=(f,\varphi_i)\ (i=0,1,\cdots,n)$$

因此，若$\varphi(x)$若是$f(x)$的最佳平方逼近，则a_j应满足：

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\varphi_0,f)\\ (\varphi_1,f)\\ \vdots\\ (\varphi_n,f)\end{bmatrix}$$

记作：$Ga=d$，从中解出$a_i^*(i=0,1,2,\cdots,n)$ ——法方程组！

则 $$\varphi^*(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i^*\varphi_i(x)$$

定理 对$\forall\varphi(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)\in\Phi$，都有$\|f-\varphi\|_2^2\ge\|f-\varphi^*\|_2^2$

下面证明 对$\forall \varphi(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x) \in \Phi$，都有$\|f-\varphi\|_2^2 \ge \|f-\varphi^*\|_2^2$

因为 $\|f-\varphi\|_2^2=(f-\varphi, f-\varphi)=(f-\varphi^*+\varphi^*-\varphi, f-\varphi^*+\varphi^*-\varphi)$

$$=(f-\varphi^*, f-\varphi^*)+(\varphi^*-\varphi, \varphi^*-\varphi)+2(f-\varphi^*, \varphi^*-\varphi)$$

因为$a_i^*(i=0,1,2,\cdots,n)$是$Ga=d$的解，即

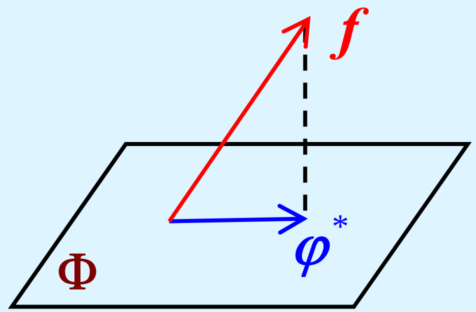
$$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_i, \varphi_j)\cdot a_j^*=(f, \varphi_i)(i=0,1,\cdots,n)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\varphi_i, a_0^*\varphi_0)+(\varphi_i, a_1^*\varphi_1)+\cdots+(\varphi_i, a_n^*\varphi_n)=(f, \varphi_i)(i=0,1,\cdots,n)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\varphi_i, \varphi^*)=(f, \varphi_i)(i=0,1,\cdots,n)$$

$$\Leftrightarrow \quad (f-\varphi^*, \varphi_i)=0(i=0,1,\cdots,n)$$

$$\Leftrightarrow \quad f-\varphi^* \perp \Phi$$



$\Phi=\mathrm{Span}\{\varphi_0(x),\cdots,\varphi_n(x)\}$

而$\varphi^*-\varphi=\sum_{j=0}^{n}(a_j^*-a_j)\varphi_j(x)\in\Phi$，所以$(f-\varphi^*, \varphi^*-\varphi)=0$

所以 $\|f-\varphi\|_2^2=\|f-\varphi^*\|_2^2+\|\varphi^*-\varphi\|_2^2 \ge \|f-\varphi^*\|_2^2$

平方误差

$$\|\delta\|_2^2 = \|f-\varphi^*\|_2^2 = (f-\varphi^*, f-\varphi^*)$$

$$= (f, f-\varphi^*) - (\varphi^*, f-\varphi^*)$$

$$= (f, f) - (f, \varphi^*)$$

$$= \|f\|_2^2 - \sum a_i^*(\varphi_i, f)$$

均方误差:$\|\delta\|_2$

2. 最佳多项式平方逼近

(1) 设$f(x)\in C[0,1]$，取$\Phi = span\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}, \rho(x)=1$，则

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\int_0^1 x^{i+j}dx=\frac{1}{i+j+1}$$

所以$G\vec{a}=\vec{d} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/(n+1) & 1/(n+1) & \cdots & 1/(2n+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_0, f) \\ (\varphi_1, f) \\ \vdots \\ (\varphi_n, f) \end{bmatrix}$

解出a_i,代入$P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$.

(2) 当 $f(x)\in C[a,b]$，令$x=(b-a)t+a$

例3 求$f(x)=e^x$在[-1,1]上的一次最佳平方逼近多项式。

例4　求$f(x)=\sqrt{1+x^2}$在[0,1]上的一次最佳平方逼近多项式。

解　$\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x$

$$d_0=(f,\varphi_0)=\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}=1.1478$$

$$d_1=(f,\varphi_1)=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)=0.6.95$$

由
$$\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.147\\ 0.609\end{bmatrix}$$

解得　$a_0=0.9348, a_1=0.4269$

所以　$P_1^*(x)=0.9343+0.4269x$

平方误差 $\|\delta\|_2^2=\|f\|_2^2-(a_0d_0+a_1d_1)$

$$=\int_0^1(1+x^2)dx-(0.9348*1.147+0.4269*0.609)$$

$$=7.1293\times10^{-4}$$

例2　求$f(x)=\cos\pi x$在[0,1]上的最佳一次平方逼近多项式。

解 [$\rho(x)\equiv 1$的情形]

取$\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x,H=span\{1,x\}.$

$$\therefore\quad (\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^1 1dx=1\quad (\varphi_0,\varphi_1)=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}\quad (\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

$$(f,\varphi_0)=\int_0^1\cos\pi xdx=0\qquad (f,\varphi_1)=\int_0^1 x\cos\pi xdx=-\frac{2}{\pi^2}$$

$\therefore$法方程组为：$\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -2/\pi^2\end{pmatrix}$

解得：$a_0=1.2159,\quad a_1=-2.4317$

$\therefore f(x)=\cos\pi x$在[0,1]上的最佳一次平方逼近多项式为

$$p(x)=1.2159-2.4317x$$

例3 求$f(x)=5x^3$在[0,1]上形如$P(x)=a+bx^2$最佳平方逼近多项式.

3. 用正交多项式作最佳平方逼近

在$[-1,1]$上选取勒让德多项式$\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}$为基函数，则

$$\text{法方程组}\ Ga=d \iff \begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & & & \\ & (\varphi_1,\varphi_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_0,f) \\ (\varphi_1,f) \\ \vdots \\ (\varphi_n,f) \end{bmatrix}$$

$$\therefore a_k = \frac{(\varphi_k,f)}{(\varphi_k,\varphi_k)} = \frac{\int_a^b \rho(x)f(x)\varphi_k(x)dx}{\int_a^b \rho(x)\varphi_k^2(x)dx}$$

例5 求$f(x)=e^x$在[-1,1]上的一次和三次最佳平方逼近多项式。

例5 求$f(x)=e^{-x}$在$[0,1]$上的二次最佳平方逼近多项式.

解　令$x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$，即$t=2x-1$，代入$f(x)$得：$F(t)=e^{\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}}$

$$p_0(x)=1,\ p_1(t)=t,\ p_2(t)=\frac{3t^2-1}{2}$$

一般区间上$f(x)\in[a,b]$,则令

$$x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\ (-1\le t\le 1)$$

$$a_0=\frac{(F,p_0)}{(p_0,p_0)}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}dt=1.7183$$

$$a_1=\frac{(F,p_1)}{(p_1,p_1)}=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}te^{\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}dt=0.8452$$

$$a_2=\frac{(F,p_2)}{(p_2,p_2)}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{3t^2-1}{2}e^{\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}dt=0.1399$$

$$\therefore\ p_2(t)=a_0+a_1t+a_2\cdot\frac{3t^2-1}{2}=0.2098t^2+0.8452t+1.6483$$

$$p_2(x)=a_0+a_1(2x-1)+a_2\cdot\frac{3(2x-1)^2-1}{2}$$

$$=0.2098(2x-1)^2+0.8452(2x-1)+1.6483$$

课后作业：

1、复习思考题：

1、2、3

2、习题五(128页)

1、2(1)、3、4、9、10