# 第十五讲

## 习题课（三）

# 重要内容回顾

1. 泰勒公式，马克劳林公式

2. 带有皮亚诺型余项的泰勒公式

3. 带有拉格朗日型余项的泰勒公式

4. 泰勒公式在近似计算中的应用

# 补充例题

**例1** 求 $f(x)=\mathrm{e}^x\ln(1+x)$ 展开到 $x^4$ 的带有佩亚诺余项的麦克劳林公式.

**解** $$\mathrm{e}^x\ln(1+x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\cdot\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^4}{6}+o(x^4)$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

注意　每个函数展开到哪一项是由一个函数的最高次项和另一个函数的最低次项的乘积决定，使得相乘后的次数 $\le$ 需要展开的次数.

比如上一例，展开次数是4次，所以

$$e^x = \left(\boxed{1} + x + \frac{x^2}{2!} + \boxed{\frac{x^3}{3!}} + o(x^3)\right)$$

$$\ln(1+x) = \left(\boxed{x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \boxed{\frac{x^4}{4}} + o(x^4)\right)$$

**例2** 利用泰勒展开求极限：

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{7}{4}}\left(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-2\sqrt[4]{x}\right).$$

**解** 令 $x=\dfrac{1}{t}$，则

$$原式=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(\sqrt[4]{1+t}+\sqrt[4]{1-t}-2\right)}{t^2}$$

$$\because \sqrt[4]{1+t}=1+\frac{1}{4}t-\frac{3}{32}t^2+o(t^2)$$

$$\sqrt[4]{1-t}=1-\frac{1}{4}t-\frac{3}{32}t^2+o(t^2)$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{-\frac{3}{16}t^2+o(t^2)}{t^2}=-\frac{3}{16}.$$

**例3** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f'(\frac{a+b}{2})=0$. 证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

**证** 利用 $f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$，

取 $x_0=\frac{a+b}{2}$，$x=a$ 和 $x=b$，代入上式得

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\underline{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)}+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\underline{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)}+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

其中 $\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2})$，$\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)$. 两式相减，得到

$$f(b)-f(a)=\left(\frac{f''(\xi_2)}{2}-\frac{f''(\xi_1)}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

于是

$$\frac{f''(\xi_2)-f''(\xi_1)}{2}=\frac{4}{(b-a)^2}(f(b)-f(a)).$$

令 $f''(\xi)=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\},\ \xi\in(a,b),$

根据上式即可得到

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

**练习** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导. 用泰勒公式证明 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(b)-2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(a)=\tfrac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi).$$

**例4** 设$h>0$, $f$ 在$U(a;h)$上有$n+2$阶连续导数,且$f^{(n+2)}(a)\neq 0$, $f$ 在$U(a;h)$上的泰勒公式为

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

$0<\theta<1$. 证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+2}$.

**证** 因 $f$ 在$U(a;h)$上有$n+2$阶连续导数,故

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

$$+\frac{f^{(n+2)}(a+\theta_1 h)}{(n+2)!}h^{n+2},\quad 0<\theta_1<1.$$

比较两式得

$$f^{(n+1)}(a+\theta h)-f^{(n+1)}(a)=\frac{f^{(n+2)}(a+\theta_1 h)}{n+2}h.\quad (*)$$

对 $f^{(n+1)}$ 在 $[a, a+\theta h]$ 用拉格朗日中值公式，得

$$f^{(n+1)}(a+\theta h)-f^{(n+1)}(a)=f^{(n+2)}(a+\theta_2\theta h)\theta h,$$

$$0<\theta_2<1. \qquad (**)$$

比较(*), (**)两式，得到

$$f^{(n+2)}(a+\theta_2\theta h)\theta=\frac{f^{(n+2)}(a+\theta_1 h)}{n+2},$$

令 $h\to 0$, 注意到 $f^{(n+2)}(x)$ 的连续性及 $f^{(n+2)}(a)\neq 0$,

即可得到

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+2}.$$

---

$$f^{(n+1)}(a+\theta h)-f^{(n+1)}(a)=\frac{f^{(n+2)}(a+\theta_1 h)}{n+2}h. \qquad (*)$$