数学分析　第五章
导数和微分

§2 求导法则

导数很有用，但全凭定义来计算导数是不方便的．为此要建立一些有效的求导法则，使导数运算变得较为简便．

一、导数的四则运算

二、反函数的导数

三、复合函数的导数

四、基本求导法则与公式

*点击以上标题可直接前往对应内容

第六讲

导数的四则运算

导数的加减法与乘法运算

定理5.4

若函数 $u(x),v(x)$ 在点 x_0 可导，则函数 $f(x)=u(x)\pm v(x)$ 在点 x_0 也可导，且

$$\left(u(x)\pm v(x)\right)'\Big|_{x=x_0}=u'(x_0)\pm v'(x_0). \qquad (1)$$

定理5.5

若函数 $u(x),v(x)$ 在点 x_0 可导，则函数

$f(x)=u(x)v(x)$ 在点 x_0 也可导，且

$$\left(u(x)v(x)\right)'\Big|_{x=x_0}=u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0). \qquad (2)$$

推论

若 $u(x)$ 在点 x_0 可导, c 是常数，则

$$(cu(x))'\big|_{x=x_0} = cu'(x_0). \tag{3}$$

定理 5.5 可推广到任意有限个函数相乘的情形，如

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

注意: $\boxed{(uv)' \cancel{=} u'v'}$, 千万不要把导数乘积公式 (2) 记错了.

下面证明乘积公式 (2).

证 (2) 按定义可得

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)v(x_0+\Delta x)-u(x_0)v(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x_0+\Delta x)v(x_0+\Delta x)-u(x_0)v(x_0+\Delta x)}{\Delta x}\right.$$

$$\left.+\frac{u(x_0)v(x_0+\Delta x)-u(x_0)v(x_0)}{\Delta x}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}v(x_0+\Delta x)$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}u(x_0)\frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}$$

$$=u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0).$$

例1 求 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的导数.

解 $f'(x)=(a_0x^n)'+(a_1x^{n-1})'+\cdots+(a_{n-1}x)'+(a_n)'$

$$=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}.$$

因此, 对于多项式 f 而言, f' 总是比 f 低一个幂次.

例2 求 $y=\sin x\ln x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处的导数.

解 由公式 (2)，得

$$y'=(\sin x)'\ln x+\sin x(\ln x)'=\cos x\ln x+\frac{1}{x}\sin x,$$

$$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

导数的除法运算

定理5.6

若函数 $u(x),v(x)$ 在点 x_0 可导，$v(x_0)\neq 0$，

则 $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 在点 x_0 也可导，且

$$\left.\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'\right|_{x=x_0}=\frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}. \qquad (4)$$

除法看似复杂，但只要注意到：$\dfrac{u(x)}{v(x)}=u(x)\cdot\dfrac{1}{v(x)}$，事情就简单了.

证 设 $g(x)=\dfrac{1}{v(x)}$, 则 $f(x)=u(x)g(x)$. 对 $g(x)$, 有

$$\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=\frac{\dfrac{1}{v(x_0+\Delta x)}-\dfrac{1}{v(x_0)}}{\Delta x}$$

$$=-\frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)}.$$

由于 $v(x)$ 在点 x_0 可导, $v(x_0)\neq 0$, 因此

$$g'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=-\frac{v'(x_0)}{v^2(x_0)},$$

亦即

$$\left.\left(\frac{1}{v(x)}\right)'\right|_{x=x_0}=-\frac{v'(x_0)}{v^2(x_0)}. \qquad (5)$$

对 $f(x)=u(x)g(x)$ 应用公式 (2) 和 (5)，得

$$f'(x_0)=u'(x_0)\frac{1}{v(x_0)}+u(x_0)\left(\frac{1}{v(x)}\right)'\bigg|_{x=x_0}$$

$$=\frac{u'(x_0)}{v(x_0)}-u(x_0)\frac{v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

$$=\frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)},$$

即 $$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'\bigg|_{x=x_0}=\frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

例3 求下列函数的导数：

(i) x^{-n}, n 是正整数； (ii) $\tan x$, $\cot x$;

(iii) $\sec x$, $\csc x$.

解 (i) $$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

(ii) $$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

同理可得 $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$

(iii) $\sec x$, $\csc x$.

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \sec x \tan x.$$

同理可得

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x.$$