第二讲

函数极限的概念 2

定义2

设 $f(x)$定义在$(-\infty,b]$上，A是一个常数.

若对于任意$\varepsilon>0$，存在 $M>0$，当 $x<-M(<b)$ 时

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时以 A 为极限，

记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$$

$$\text{或}\ f(x)\to A\ (x\to-\infty).$$

定义3

设 $f(x)$定义在∞的某个邻域 $U(\infty)$ 内, A是一个常数. 若对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $M>0$, 当$|x|>M$时

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$当 $x\to\infty$ 时以 A 为极限,

记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

或 $f(x)\to A\ (x\to\infty)$.

例3 证明 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0.$

证 对于任意正数 $\varepsilon\ (0<\varepsilon<1)$, 取 $M=-\ln\varepsilon,$

当 $x<-M=\ln\varepsilon$ 时

$$\left|e^x-0\right| = e^x < \varepsilon.$$

这就是说

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

例4 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0.$

证 对于任意正数 ε, 可取$M=\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}$, 当 $|x|>M$ 时, 有

$$\left|\frac{1}{1+x^2}-0\right|<\frac{1}{x^2}<\varepsilon,$$

所以结论成立.

从定义1、2 、3 不难得到:

定理3.1

$f(x)$定义在∞ 的一个邻域内，则

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充要条件是:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

例如 $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x=\dfrac{\pi}{2}$,

则由定理 3.1, $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$ 不存在.

x趋于x_0 时的函数极限

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域 $U^{\circ}(x_0)$ 内有定义.

下面我们直接给出函数 $f(x)$当 $x \to x_0$ 时以常数 A 为极限的定义.

定义1

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域$U^o(x_0)$内有定义，A是一个常数. 如果对于任意正数 ε, 存在正数δ, 当$x\in U^o(x_0,\delta)\subset U^o(x_0)$时

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称$f(x)$当 $x\to x_0$ 时以 A 为极限. 记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

或者 $f(x)\to A\ (x\to x_0)$.

例5 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

分析 对于任意正数 ε, 要找到$\delta>0$, 当$0<|x-1|<\delta$ 时, 使

$$\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|$$

$$=\frac{\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right|}{2\sqrt{2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}=\frac{|x-1|}{2\sqrt{2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})^2}<\varepsilon. \quad (*)$$

因 $$\frac{|x-1|}{2\sqrt{2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})^2}\le|x-1|,$$

只要$|x-1|<\varepsilon$,(*)式就能成立, 故取$\delta=\varepsilon$即可.

证 任给正数 ε, 取 $\delta=\varepsilon$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|=\frac{|x-1|}{2\sqrt{2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})^2}$$

$$\le|x-1|<\varepsilon,$$

这就证明了

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad \frac{|x-1|}{2\sqrt{2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})^2}\le|x-1|$$

例6 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} x^2 = x_0^2$.

分析 要使

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| < \varepsilon,$$

可以先限制 $|x - x_0| < 1$, 因为此时有

$$|x + x_0| = |x - x_0 + 2x_0| \le |x - x_0| + 2|x_0|$$

$$< 1 + 2|x_0|,$$

所以 $|x^2 - x_0^2| \le (1 + 2|x_0|)|x - x_0|$, 故只要

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|} \text{即可}.$$

证 $\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\right\}$，当$0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|x^2-x_0^2|<\varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{x\to x_0}x^2=x_0^2.$$

$$|x^2-x_0^2|\le(1+2|x_0|)|x-x_0|$$

注 在例5、例6中，我们将所考虑的式子适当放大，其目的就是为了更简洁地求出 δ，或许所求出的 δ 不是“最佳”的，但这不影响我们解题的有效性.

例7 证明：

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.