第六讲

上下极限的基本性质

上(下)极限的基本性质

由上、下极限的定义, 立即得出:

定理7.5

对任何有界数列 $\{x_n\}$, 有

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n. \tag{1}$$

下面这个定理刻画了极限与上、下极限之间的关系.

定理7.6

有界数列 $\{x_n\}$ 存在极限的充要条件是:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n. \tag{2}$$

定理7.7

设$\{x_n\}$为有界数列，则有

1° $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = A$ 的充要条件是：对于任意的 $\varepsilon > 0$,

(i) 存在 N, 当 $n > N$ 时，$x_n < A + \varepsilon$;

(ii) 存在 $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} > A - \varepsilon$, $k = 1, 2, \cdots$.

2° $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = B$ 的充要条件是：对于任意的 $\varepsilon > 0$,

(i) 存在 N, 当 $n > N$ 时，$x_n > B - \varepsilon$;

(ii) 存在$\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} < B + \varepsilon$, $k = 1, 2, \cdots$.

证 1°和2°在形式上是对称的，所以仅证明 1°.

必要性 设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n = A$. 因为 A 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点，所以存在 $\{x_{n_k}\}$，使得 $x_{n_k} \to A\ (k\to\infty)$，故对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $K > 0$，当 $k > K$ 时，$A - \varepsilon < x_{n_k}$. 将 $\{x_{n_k}\}$ 中的前面 K 项剔除，这样就证明了(ii).

又因 A 是 $\{x_n\}$ 的最大聚点，所以对上述 ε，在区间 $[A+\varepsilon,\ +\infty)$ 上，至多只含 $\{x_n\}$ 的有限项. 不然的话，因为 $\{x_n\}$ 有界，故 $\{x_n\}$ 在 $[A+\varepsilon,\ +\infty)$ 上还有聚点，这与 A 是最大聚点相矛盾.

设这有限项的最大下标为 N，那么当 $n > N$ 时，

$$x_n < A + \varepsilon.$$

充分性 任给 $\varepsilon > 0$, 综合 (i) 和 (ii), 在 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 上含有 $\{x_n\}$ 的无限项, 即 A 是 $\{x_n\}$ 的聚点.

而对于任意的 $A' > A$, 令 $\varepsilon_0 = \dfrac{A'-A}{2}$, 由于满足

$$x_n > A + \varepsilon_0 = \frac{A+A'}{2}$$

$$\boxed{A' - \varepsilon_0 = \frac{A'+A}{2},}$$

的项至多只有有限个, 这说明在 $(A'-\varepsilon_0, A'+\varepsilon_0)$ 上也至多只有 $\{x_n\}$ 的有限项, 故 A' 不是 $\{x_n\}$ 的聚点, 所以 A 是 $\{x_n\}$ 的最大聚点. 从而有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = A.$$

定理7.8(保不等式性)

设 $\{x_n\},\{y_n\}$ 均为有界数列，并且满足：存在 $N_0>0$，当 $n>N_0$ 时，有 $x_n\le y_n$.

则取上(下)极限后，原来的不等号方向保持不变：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n. \tag{3}$$

特别若 $a\le x_n\le y_n\le b$，则更有

$$a\le \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \le b. \tag{4}$$

例2 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是有界数列, 那么

(i) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\le\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}b_n$; (5)

(ii) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\ge\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n+\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}b_n$. (6)

证 这里只证明 (i) , (ii) 可同理证明. 设

$$A=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n,\quad B=\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n.$$

由定理7.7, $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时,

$$a_n<A+\frac{\varepsilon}{2},\quad b_n<B+\frac{\varepsilon}{2},$$

故

$$a_n+b_n<A+B+\varepsilon.$$

再由定理 7.8 的 (4) 式, 得

$$\varlimsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)\le A+B+\varepsilon.$$

因为 ε 是任意的, 故

$$\varlimsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)\le A+B=\varlimsup_{n\to\infty}a_n+\varlimsup_{n\to\infty}b_n.$$

注 这里严格不等的情形确实会发生, 例如

$$a_n=(-1)^{n-1},\quad b_n=(-1)^n.$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}a_n=1,\ \varlimsup_{n\to\infty}b_n=1,$$

而 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0.$

定理7.9

设 $\{x_n\}$ 为有界数列. 则有

(i) A 是 $\{x_n\}$ 的上极限的充要条件是

$$A=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\{x_k\}; \tag{7}$$

(ii) B 是 $\{x_n\}$ 的下极限的充要条件是

$$B=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n}\{x_k\}. \tag{8}$$

例3 用上、下极限证明：若$\{x_n\}$为有界发散数列，则存在$\{x_n\}$的两个子列，收敛于不同的极限.

证 由定理7.6，有界数列$\{x_n\}$发散的充要条件为$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \neq \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. 于是存在$\{x_n\}$的两个子列$\{x'_{n_j}\}$，$\{x''_{n_j}\}$，使得

$$\lim_{j\to\infty} x'_{n_j} = \varliminf_{n\to\infty} x_n \neq \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{j\to\infty} x''_{n_j}.$$

注 本例命题用现在这种证法，可以说是最简捷的.

复习思考题

数列的上、下极限，除用定义2 定义外，也可用它们的充要条件(定理7.7 与定理7.9) 来定义.

试从直观性、应用的方便性等方面，分析这三种定义方式各有哪些特点?