第二讲

具有特殊性质的函数

函数的有界性

我们已学习了有界数集的概念，函数的界是指其值域这个数集的界.

例1. 叙述函数 f 在区间 I 上无界的概念，

由此证明下列函数无界：

$$f(x)=\frac{1}{\sin x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

叙述 f 在 I 上无界 $\Leftrightarrow$ $\forall M>0, \exists\, x_0 \in I,$

使得 $$\left|f\left(x_0\right)\right|>M.$$

证明 任意 $M>1$ ，取 $x_0=\arcsin\dfrac{1}{2M} \in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

则
$$f\left(x_0\right)=\frac{1}{\sin x_0}>M.$$

因此，f 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上无界.

$$f(x)=\frac{1}{\sin x}, x \in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

例 2. 求证函数 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上无上、下界.

证明 $\forall M>0$，取

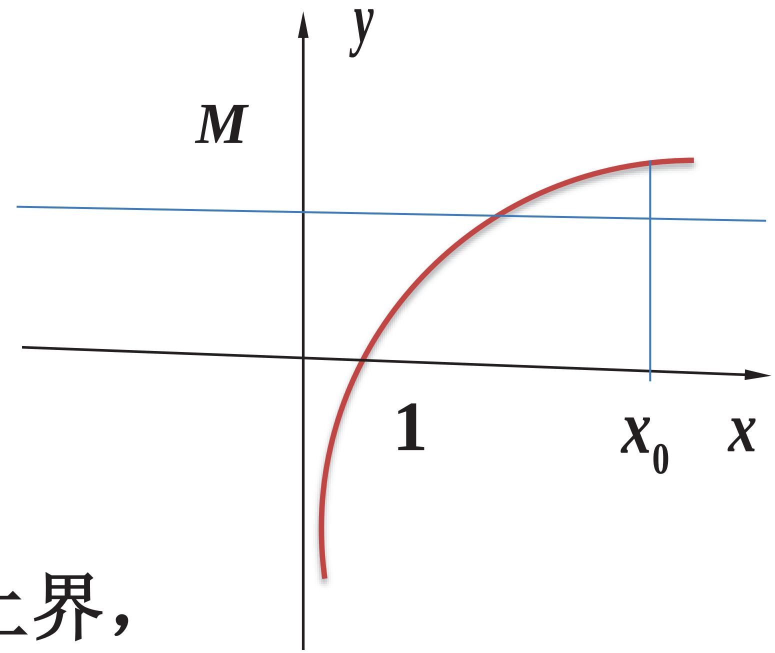
$$x_0=e^{M+1}\in(0,+\infty)$$

则 $\ln x_0=\ln e^{M+1}$

$$=M+1>M$$

故 $\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上无上界，

同理可证无下界.



思考 $\ln x$ 在任何闭区间 $[a,b]\subset(0,+\infty)$ 有界.

函数的单调性

例3. 设 f,g 均是区间 I 上的严格递增的函数，

求证：$\varphi(x):=\max\{f(x),g(x)\}$， $\psi(x):=\min\{f(x),g(x)\}$

均是 I 上的严格递增函数.

证明 $\forall x_1,x_2\in I$， 且 $x_1>x_2$ ，由条件有

$$\max\{f(x_1),g(x_1)\}\geq f(x_1) > f(x_2),$$

$$\max\{f(x_1),g(x_1)\}\geq g(x_1)>g(x_2)$$

因此，有

$$\max\{f(x_1),g(x_1)\}>\max\{f(x_2),g(x_2)\},$$

即 $\varphi(x_1)>\varphi(x_2)$， 故 φ 是严格递增函数.

类似地，ψ 也是严格递增函数.

函数的周期性

例4. 1）证明

$$f(x)=x-[x],\ x\in\mathbb{R}$$

是周期函数.

2）证明

$$g(x)=x-[x]+\sin x,\ x\in\mathbb{R}$$

不是周期函数.

证明 1）由取整函数的性质

$$[x] \le x < [x]+1, \forall\ x \in \mathbb{R}$$

有

$$[x]+1 \le x+1 < [x]+1+1, \forall\ x \in \mathbb{R}$$

故

$$[x+1] = [x]+1, \forall\ x \in \mathbb{R}$$

从而对 $\forall\ x \in \mathbb{R}$，有

$$f(x+1)=x+1-[x+1]=x-[x]=f(x)$$

故 f 是以 1 为周期的周期函数.

2）（反证法） 假设 g 是实数域的周期函数，

且周期为 $T(\neq 0)$，即

$$x+T-[x+T]+\sin(x+T)=x-[x]+\sin x,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

特别地，分别取 $x=0, x=-T$ 有

$$T-[T]+\sin T=0, \quad -T-[-T]+\sin(-T)=0,$$

将上面两式相加有

$$T+[-T]=0,$$

因此 T 必为整数. 这样由上面的式子有

$$\sin T=0, \qquad \text{矛盾.}$$

注本例说明两个周期函数的和未必是周期函数.

下例表明一定条件下两周期函数的和才是周期函数.

例 5. 设 $f(x), g(x)$ 是 I 上分别以 T_1, T_2 为周期的周期函数，证明：当 T_1/T_2 为有理数时，$f(x)+g(x)$ 也是 I 上的周期函数.

证明 设

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{m}{n},$$ 其中 m,n 是互素整数.

取 $T=nT_1=mT_2$ 则 $T>0$,

使得

$$f(x+T)+g(x+T) = f(x)+g(x), \quad \forall x \in I$$

故 $f(x)+g(x)$ 以 T 为周期的周期函数.

练习

求证：

$$f(x)=\cos(x^2)$$

不是周期函数.

◎函数的奇偶性

例6. 设

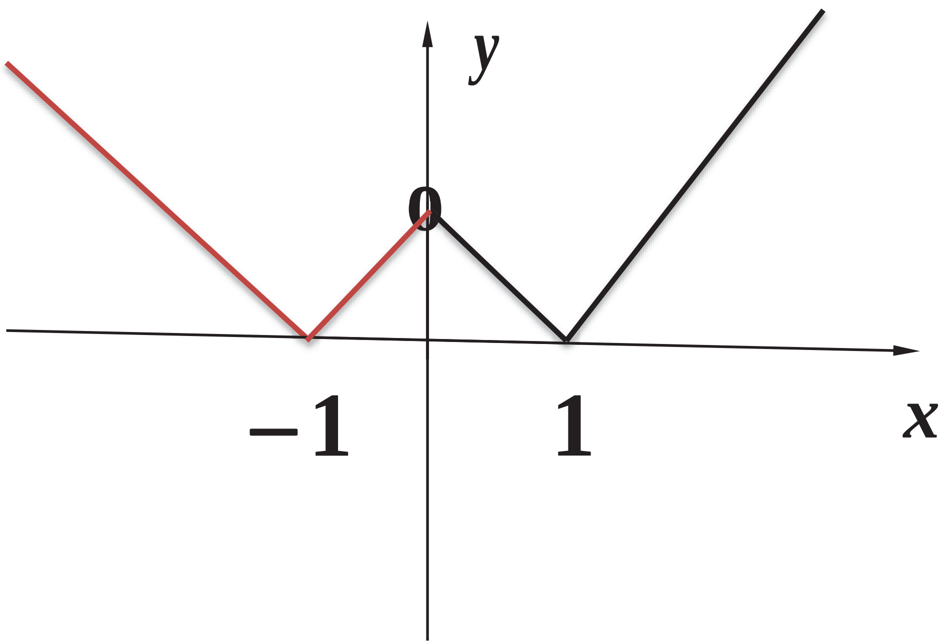
$$f(x)=\begin{cases} g(x), & x\le 0, \\ |x-1|, & x>0 \end{cases}$$

1）求$g(x)$，使 $f(x)$是 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数；

2）求$g(x)$，使 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$上的奇函数.

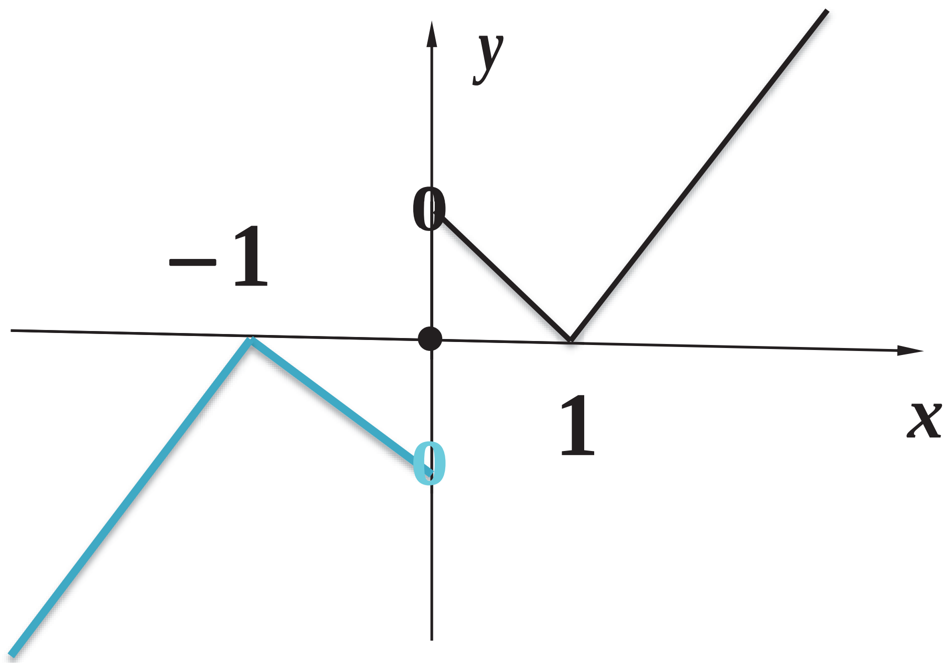
解 1）

$$g(x)=|x+1|,\quad x\le 0.$$



2）

$$g(x)=\begin{cases}-|x+1|, & x<0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$



例 7. 设 $a>1$，$\forall x\in\mathbb{R}$ ， 令

$$a^{x}=\sup\left\{a^{r};r<x,\ r\in\mathbb{Q}\right\}$$

求证：

$$a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$$

证明 $\forall\, r_1<x_1,\ r_2<x_2,\quad r_1,r_2\in\mathbb{Q},$

有

$$a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}\le a^{x_1+x_2}$$

故

$$a^{x_1}\cdot a^{x_2}\le a^{x_1+x_2}$$

又 $\forall r < x_1 + x_2$， 令 $\delta = x_1 + x_2 - r > 0$ ， 由有理数在实数集上稠密，故

$$\exists r_1 \in \left(x_1 - \frac{\delta}{2}, x_1\right) \cap \mathbb{Q}$$

令 $r_2 = r - r_1$ ， 则有理数 $r_2 < x_2 - \frac{\delta}{2}$ ，故

$$a^r = a^{r_1} \cdot a^{r_2} \le a^{x_1 + x_2}$$

从而

$$a^{x_1 + x_2} \le a^{x_1} \cdot a^{x_2}$$

综上, 结论成立.

广义确界的概念

规定：

1）无上界的集合的上确界为 $+\infty$,

2）无下界的集合的下确界为 $-\infty$.

例 8. 设数集

$$S=\left\{1+n\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)^2;n\in\mathbb{N}\right\}$$

求 $\sup S,\inf S$.

解 令

$$S_1=\left\{1+n\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)^2;n=2k-1,k\in\mathbb{N}\right\}$$

则

$$S_1=\{1+2k-1;k\in\mathbb{N}\}=\{2,4,6,\ldots\}$$

显然 S_1 无上界，又 $S_1\subset S$ ，故 S 无上界

由此，

$$\sup S=+\infty$$

又 S 有最小值 1 ，故

$$\inf S=1$$