数学分析 第二章
数列极限

§3 数列极限存在的条件

学过数列极限概念后，自然会产生两个问题：一是怎么知道一个数列是收敛的?即极限的存在性问题;二是如何计算数列的极限？其中，判断数列是否收敛，这在极限理论中占有非常重要的地位.

第五讲

单调有界定理

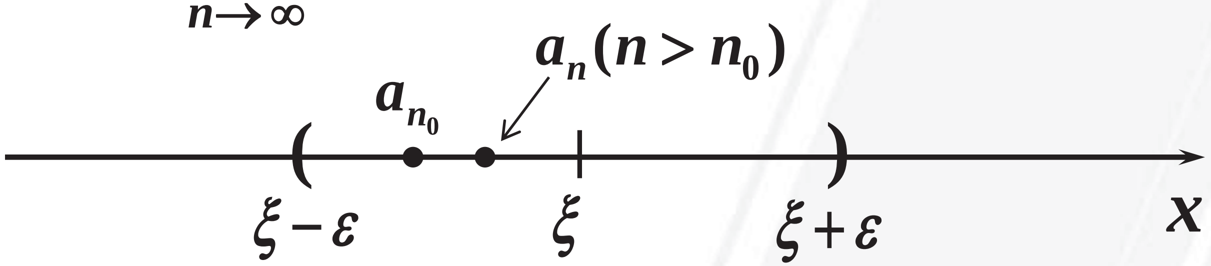
定理2.9(单调有界定理)

单调有界数列必有极限.

证 不妨设 $\{a_n\}$ 单调增,有上界. 由确界定理,存在 $\sup\{a_n\}=\xi$. 由上确界的定义,对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 a_{n_0}, 使 $a_{n_0}>\xi-\varepsilon$. 故当 $n>n_0(=N)$ 时,

$$\xi-\varepsilon<a_{n_0}\le a_n\le\xi<\xi+\varepsilon,$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$.



例1 设 $a_1=\sqrt{2},\cdots,a_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n},\cdots,$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解 显然 $a_n>0$. 因 $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, 故 $a_2>a_1$; 设 $a_n>a_{n-1}$, 则有 $a_{n+1}-a_n=\sqrt{2+a_n}-\sqrt{2+a_{n-1}}$

$$=\frac{a_n-a_{n-1}}{\sqrt{2+a_n}+\sqrt{2+a_{n-1}}}>0,$$

所以$\{a_n\}$递增.

显然, $a_1=\sqrt{2}<2$, 设 $a_n<2$, 则

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=2.$$

由此得到 $\{a_n\}$有上界 2, 故极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 存在.

于是由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+a_n}$，可得

$$A^2 = 2 + A，并解出\ A = 2,\ A = -1.$$

由极限的不等式性，知道 $A > 0$，所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2\,.$$

例2 下面的叙述错在哪儿?

“设 $a_n = 2^n$, $n = 1, 2, \cdots$, 则

$$a_{n+1} = 2^{n+1} = 2a_n.$$

因为显然有 $a_n > 0$, 所以 $\{a_n\}$ 递增. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 从而得出

$$A = 2A \Rightarrow A = 0,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = 0$.”

以前知道圆周率 π 是一个重要的无理数，现在来介绍另一个重要的无理数 e.

考察数列 $\{e_n\}=\left\{(1+\dfrac{1}{n})^n\right\}$的收敛性.

利用几何算术平均数的关系，有

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{个}}$$

$$<\left(\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

因此 $e_n < e_{n+1}, \quad n = 1, 2, \cdots.$

故 $\{e_n\}$ 是单调增数列.

利用二项式展开, 得

$$e_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}), \tag{1}$$

$$e_n \le 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}. \qquad (2)$$

由此 $e_n \le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3,$

这就证明了$\{e_n\}$又是有界数列. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} e_n$ 存在.

记此极限为 e ,即

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

$$e_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right), \qquad (1)$$

*例3 设 $s_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$, $n = 1, 2, \cdots$,

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \mathrm{e}.$

证 显然$\{s_n\}$是单调增数列, 且由例2中的(2)式,

$$e_n \le 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$= s_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty} s_n$存在且由极限的保不等式性,

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} e_n \le \lim_{n\to\infty} s_n.$$

又对任意 $n > m$,

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$> 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})$$

$$+\cdots+\frac{1}{m!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{m-1}{n}),$$

因此, 在上式两边令 $n\to\infty$, 得

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}e_n\geq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{m!}=s_m.$$

当 $m\to\infty$ 时, 由极限的保不等式性, $\mathrm{e}\geq\lim\limits_{m\to\infty}s_m$.

从而

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$