第九讲

无穷小量的阶

无穷小量阶的比较

两个相同类型的无穷小量，它们的和、差、积仍是无穷小量，但是它们的商一般来说是不确定的. 这与它们各自趋于零的速度有关. 为了便于考察两个无穷小量之间趋于零的速度的快慢，我们给出如下定义.

设当 $x \to x_0$ 时， $f(x), g(x)$ 均是无穷小量 .

1. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, 则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是关于 $g(x)$ 的高阶无穷小量, 记作

$$f(x)=o(g(x))\ (x\to x_0).$$

当 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量时, 我们记

$$f(x)=o(1)\ (x\to x_0).$$

例如: $1-\cos x=o(x)\ (x\to 0)$;

$$\sin x=o(1)\ (x\to 0);$$

$$x^{k+1}=o(x^k)\ (x\to 0, k>0).$$

2. 若存在正数 M 和 L，使得在 x_0 的某一空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 内，有

$$L \le \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le M,$$

则称 $f(x)$与 $g(x)$是 $x \to x_0$ 时的同阶无穷小量.

根据函数极限的保号性，特别当

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = c \ne 0$$

时，这两个无穷小量一定是同阶的.

例如：当 $x \to 0$ 时，$1-\cos x$ 与 x^2是同阶无穷小量；

当 $x \to 0$ 时，x 与 $x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$ 是同阶无穷小量.

3. 若两个无穷小量在 $U^{\circ}(x_0)$ 内满足: $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \le L$,

则记 $f(x)=O(g(x))\ (x\to x_0)$.

$f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的有界量时，我们记

$$f(x)=O(1)\ \ (x\to x_0).$$

应当注意，若 $f(x), g(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的同阶无穷小量，当然有

$$f(x)=O(g(x))\ \ (x\to x_0).$$

反之不一定成立, 例如

$$x\sin\frac{1}{x}=O(x)\ \ (x\to 0).$$

但是这两个无穷小量不是同阶的.

注意： 这里的 $f(x)=o(g(x))$ 与 $f(x)=O(g(x))$ $(x\to x_0)$ 和通常的等式是不同的，这两个式子的右边，本质上只是表示一类函数．例如 $o(g(x))$ $(x\to x_0)$ 表示 $g(x)$ 的所有高阶无穷小量的集合．也就是说，这里的 “$=$” 类似于 “$\in$”．

4. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的等价无穷小量, 记作

$$f(x) \sim g(x) \ \ (x \to x_0).$$

因为 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, 所以 $\sin x \sim x (x \to 0)$;

因为 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x}{x} = 1$, 所以 $\arctan x \sim x (x \to 0)$;

同样还有 $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2} x^2 \ (x \to 0)$.

根据等价无穷小量的定义，显然有如下性质：

若 $f(x) \sim g(x)\ (x \to x_0)$， $g(x) \sim h(x)\ (x \to x_0)$，

那么 $f(x) \sim h(x)\,(x \to x_0)$. 这是因为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)} = 1 .$$

前面讨论了无穷小量阶的比较，值得注意的是，

不是任何两个无穷小量都可作阶的比较. 例如

$\dfrac{\sin x}{x}$ 与 $\dfrac{1}{x^2}$ 均为 $x \to +\infty$ 时的无穷小量，却不能按照前面讨论的方式进行阶的比较. 这是因为

$$\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{1}{x^2}} = x\sin x \ (x \to +\infty)$$

是一个无界量，并且 $(2n\pi)\sin(2n\pi) \to 0$.

下面介绍一个非常有用的定理:

定理3.12

设函数 f, g, h 在 $U^\circ(x_0)$ 内有定义，且

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0).$$

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)h(x) = A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)h(x) = A$；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{h(x)}{f(x)} = A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{h(x)}{g(x)} = A$.

证 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)h(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$，所以

$$\lim_{x\to x_0} g(x)h(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} f(x)h(x) = A.$$

(2) 可以类似地证明.

定理 3.12 告诉我们，在求极限时，乘积中的因子可用等价无穷小量代替，这是一种很有用的方法.

例1 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{\sin 2x}$.

解 因为 $\arctan x \sim x$， $\sin 2x \sim 2x \ (x\to 0)$， 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

例2 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$