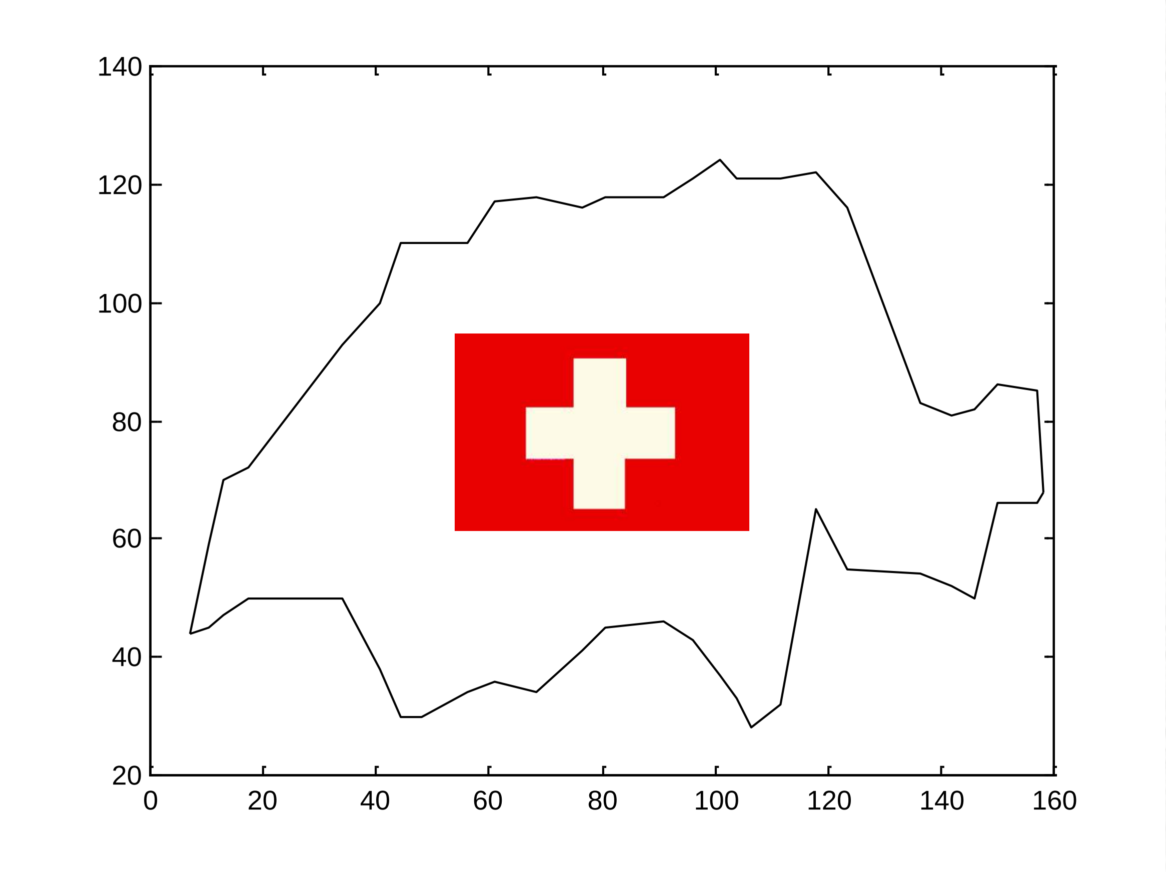
第五章 数值积分法

一个实际问题

为了计算瑞士国土的面积,首先对地图作了如下测量:以西向东方向为x轴,由南向北方向为y轴,选择方便的原点,并将从最西边界到最东边界在x轴上的区间适当地划分为若干段,在每个分点的y方向测出南边界点和北边界点的y坐标,数据如表(单位*mm*):

x	7.0	10.5	13.0	17.5	34.0	40.5	44.5	48.0	56.0
y1	44	45	47	50	50	38	30	30	34
y2	44	59	70	72	93	100	110	110	110
x	61.0	68.5	76.5	80.5	91.0	96.0	101.0	104.0	106.5
y1	36	34	41	45	46	43	37	33	28
y2	117	118	116	118	118	121	124	121	121
x	111.5	118.0	123.5	136.5	142.0	146.0	150.0	157.0	158.0
y1	32	65	55	54	52	50	66	66	68
y2	121	122	116	83	81	82	86	85	68

瑞士地图的外形如图(比例尺18mm:40km)



试由测量数据计算瑞士国土的近似面积,并与其精确值41288平方公里比较

§1 数值积分的基本概念

一 数值积分的必要性

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

其中，$F(x)$为$f(x)$的原函数。

实际中可能遇到的问题：

(1) $f(x)$的解析式根本不存在,只给出了$f(x)$的一些数值

(2) $f(x)$的原函数$F(x)$求不出来,如$F(x)$不是初等函数

如：$\int \frac{x}{\sin x}dx$ ， $\int \frac{1}{\ln x}dx$

(3) $F(x)$的表达式过于复杂：

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^4}dt = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(arctg\frac{x}{\sqrt{2}-x} + arctg\frac{x}{\sqrt{2}+x}\right)$$

二 基本思想

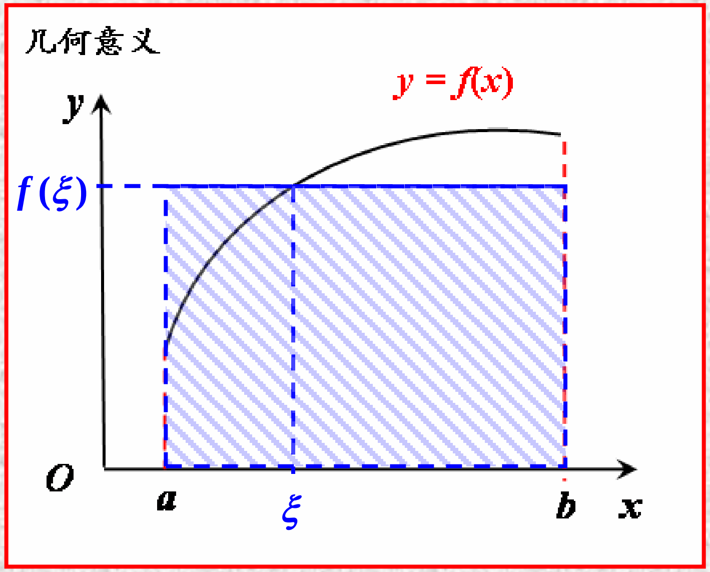
设$f(x) \in C[a,b]$，则由积分中值定理

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx$$

$$=(b-a)f(\xi) \qquad \xi \in [a,b]$$

即：曲边梯形的面积等于

底为$b-a$，高为$f(\xi)$的矩形面积



$f(\xi)$——曲边梯形在$[a,b]$的平均高度。

1. 梯形公式

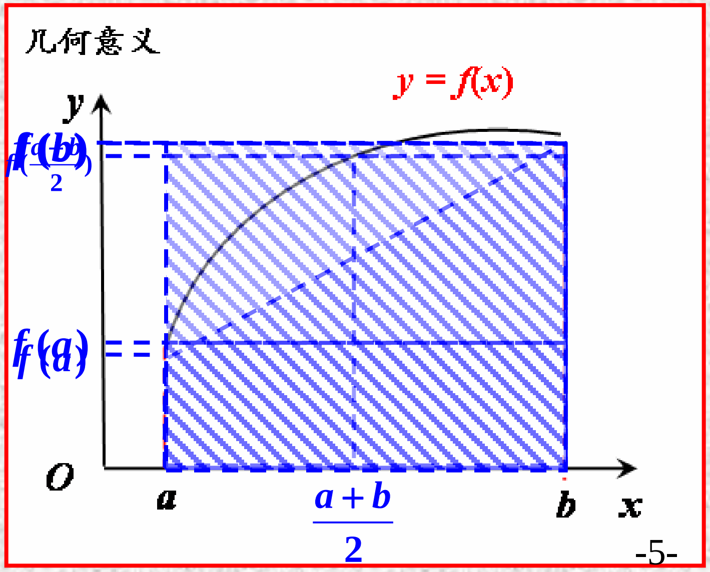
$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{[f(a)+f(b)]}{2}(b-a)$$

2. 矩形公式

中：$I=\int_a^b f(x)dx \approx f(\frac{a+b}{2})(b-a)$

左：$I=\int_a^b f(x)dx \approx f(a)(b-a)$

右：$I=\int_a^b f(x)dx \approx f(b)(b-a)$



3 推广

$$\because I(f)=\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,\ \text{其中}\lambda=\max_{0\le k\le n}\Delta x_k, \xi_k\in[x_{k-1},x_k].$$

$$\therefore I(f)=\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)\triangleq I_n$$

其中, x_k：求积节点；

A_k：求积系数，仅与$\{x_k\}$有关，与$f(x)$无关。

求积余项：$R_n=I(f)-I_n=\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$ 方法误差

如，求$I(f)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$的近似值。

方法1: $I(f)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\approx\frac{f(0)+f(1)}{2}=0.75$

方法2: $I(f)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\approx\frac{f(0)+4f(0.5)+f(1)}{6}=0.78333...$

精确值: $I(f)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}=0.78539815...$

问题：不同的数值公式，计算结果不同，如何衡量公式的好坏？

三 代数精度

1 定义： 若某个求积公式对所有次数$\le m$的多项式都精确成立，而至少对一个$m+1$次多项式不精确成立，则称该公式具有m次代数精度。

2定理： 一个求积公式具有m次代数精度的充要条件是该公式对$1, x, x^2, \cdots, x^m$精确成立，而对x^{m+1}不精确成立。

例1 验证：矩形公式 $I=\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})$

具有一次代数精度。

解

$$f(x)=1\text{时}:\text{左}=\int_a^b 1dx=b-a=\text{右}$$

$$f(x)=x\text{时}:\text{左}=\int_a^b xdx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

$$\text{右}=(b-a)\frac{a+b}{2} \qquad \boxed{\text{左}=\text{右}}$$

$$f(x)=x^2\text{时}:\text{左}=\int_a^b x^2dx=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

$$\text{右}=(b-a)(\frac{a+b}{2})^2 \qquad \boxed{\text{左}\neq\text{右}}$$

$\therefore$代数精度为"1"。

例2 试确定A_1, A_2，使数值积分公式

$$I=\int_a^b f(x)\approx A_1 f(a)+A_2 f(b)$$

的代数精度尽可能高。

解 令公式分别对 $f(x)=1, x$时精确成立,则有

$$\begin{cases} b-a=A_1+A_2 \\ \frac{1}{2}(b^2-a^2)=A_1a+A_2b \end{cases}$$

解之得： $A_1=A_2=\frac{1}{2}(b-a)$

代入得： $\int_a^b f(x)\approx\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))$

可以证明梯形公式具有1次代数精度。

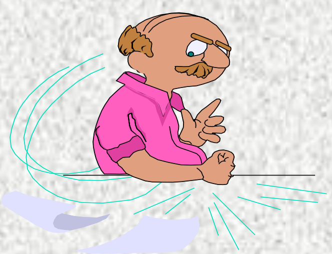
例3　试确定积分公式

$$I=\int_{-1}^{1} f(x) \approx A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2)$$

中的参数A_1, A_2, x_1, x_2，使其代数精度尽量高，并求代数精度。

问题：该公式的代数精度最高可达多少？

思考



提示：　1 有几个待定参数？

　　　　2 可列几个方程？

答案：$A_1=A_2=1,\ \ x_1=-x_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

代数精度$n=3$.

备注：使代数精度达到最高的数值求积公式，

称为Gauss公式（§5中介绍）.

推广：有n个节点的求积公式，精度最高可达多少？

§2 插值型求积法

一 插值型求积公式

❑ 基本思想 用被积函数$f(x)$的插值多项式$P_n(x)$代替$f(x)$作积分。

即：$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$

❑ 公式 已知求积节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$及其函数值$f(x_i)$,
则$f(x)$的Lagrange插值多项式为

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)$$

其中$l_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$为Lagrange插值基函数.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \int_a^b l_k(x)dx\, f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$ 其中 $A_k = \int_a^b l_k(x)dx.$

即：$$I=\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

其中：x_k为求积节点(插值节点)，$A_k=\int_a^b l_k(x)dx$ 求积系数。

称上述由插值基函数确定求积系数的公式为插值型求积公式。

❑ 求积余项(方法误差)

$$R_n = I - I_n = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_n(x)dx$$

$$= \int_a^b [f(x)-P_n(x)]dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)dx$$

❑ 代数精度(P107-Th2)

定理2 具有n个求积节点的数值求积公式

$$I=\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \triangleq I_n$$

是插值型求积公式的充要条件是该公式至少具有$n-1$次代数精度。

二 Newton-Cotes公式

求积节点等距分布的插值型求积公式.

公式推导 考虑插值型求积公式

$$I=\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$$

$$=\int_a^b \sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_k(x)dx = \sum_{k=0}^{n}\left(\int_a^b l_k(x)dx \cdot f(x_k)\right)$$

其中：$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_k(x)$为$f(x)$的Lagrange插值多项式，

$$A_k=\int_a^b l_k(x)dx = \int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}dx$$

下面考虑插值节点等距时A_k的计算：

将$[a,b]$ n等分，步长$h=\dfrac{b-a}{n}$，节点$x_k=a+kh(k=0,1,\cdots,\mathrm{n})$，则

$$A_k=\int_a^b\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}dx \;\underset{x=a+th}{\overset{\boxed{\text{换元}}}{=\!=\!=}}\; \int_0^n\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\frac{(a+th)-(a+jh)}{(a+kh)-(a+jh)}d(a+th)$$

$$=\int_0^n\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\frac{(t-j)h}{(k-j)h}\cdot hdt=h\int_0^n\frac{\prod\limits_{j=0,j\neq k}^{n}(t-j)}{k(k-1)(k-2)\cdots(k-k+1)\cdot(k-k-1)\cdots(k-n)}dt$$

$$=h\int_0^n\frac{\prod\limits_{j=0,j\neq k}^{n}(t-j)}{k!\cdot(-1)^{n-k}(k-n)!}dt=h\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{k!\cdot(n-k)!}\int_0^n\prod_{\substack{0\le j\le n\\j\neq k}}(t-j)dt$$

$$=(b-a)\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{n\cdot k!\cdot(n-k)!}\int_0^n\prod_{\substack{0\le j\le n\\j\neq k}}(t-j)dt=(b-a)\cdot C_k^{(n)}$$

其中$C_k^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-k}}{n\cdot k!\cdot(n-k)!}\displaystyle\int_0^n\prod_{\substack{0\le j\le n\\j\neq k}}(t-j)dt$，称为**Cotes**系数.

$$C_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k! \cdot (n-k)!} \int_0^n \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne k}} (t-j)dt$$

$\therefore$ n阶Newton-Cotes公式为

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = (b-a) \cdot \sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k)$$

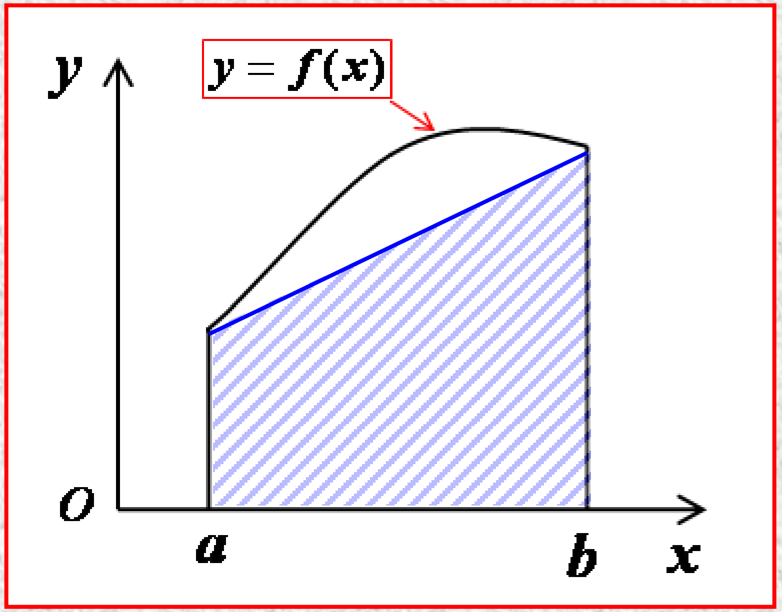
注：$C_k^{(n)}$与$f(x)$和积分区间均无关！

❑ 几个低阶Newton-Cotes公式

1、$n=1$时 积分区间一等分

$$C_0^{(1)} = -\int_0^1 (t-1)dt = \frac{1}{2}$$

$$C_1^{(1)} = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$$



$$\therefore I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

——梯形公式

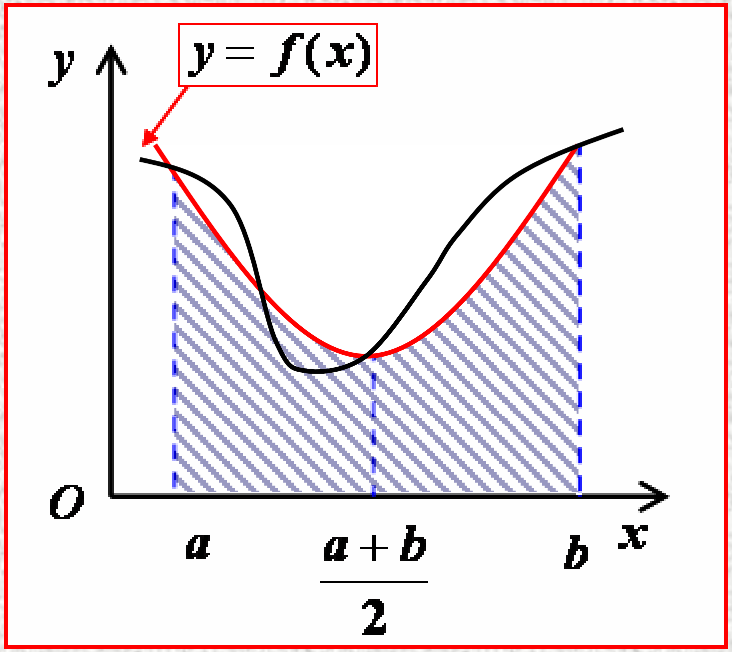
$$C_k^{(n)}=\frac{(-1)^{n-k}}{n\cdot k!\cdot(n-k)!}\int_0^n \prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\ne k}}(t-j)dt$$

2、$n=2$时 积分区间2等分

$$C_0^{(2)}=\frac{1}{4}\int_0^2 (t-1)(t-2)dt=\frac{1}{6}$$

$$C_1^{(2)}=-\frac{1}{2}\int_0^2 t(t-2)dt=\frac{4}{6}$$

$$C_2^{(2)}=\frac{1}{4}\int_0^2 t(t-1)dt=\frac{1}{6}$$



$$\therefore I=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

——Simpson公式

3、同理可得$n=4$时：

$$C_0^{(4)}=C_4^{(4)}=\frac{7}{90},C_1^{(4)}=C_3^{(4)}=\frac{32}{90},C_2^{(4)}=\frac{12}{90}$$

$$I=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{90}(7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4))$$

——Cotes公式

n	$C_k^{(n)} = A \times B_k \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$	
	A	B_k
1	1/2	1 1
2	1/6	1 4 1
3	1/8	1 3 3 1
4	1/90	7 32 12 32 7
5	1/288	19 75 50 50 75 19
6	1/840	41 216 27 272 27 216 41
7	1/17280	751 3577 1323 2989 2989 1323 3577 751
8	1/28350	989 5888 -928 10496 -4540 10496 -928 5888 989

Cotes系数表

□ 代数精度【P108-Th1】

n阶Newton – Cotes公式的代数精度为$m = \begin{cases} n+1, & \text{当}n\text{为偶数} \\ n\;\;, & \text{当}n\text{为奇数} \end{cases}$.

注：梯形公式、Simpson公式和Cetos公式分别具有1、3、5次代数精度。

例1

分别用梯形公式、Simpson公式和Cetos公式计算积分$I = \int_{0.6}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$.

求积余项

1 梯形公式

$$R(T)=\int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)dx$$

$$=\frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx$$

$$=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta) \quad \eta\in[a,b]$$

2 Simpson公式

$$R(S)=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)$$

3 Cotes公式

$$R(C)=-\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{b-a}{4}\right)^6 f^{(6)}(\eta)$$

一般插值求积公式余项：

$$R_n=I-I_n$$

$$=\int_a^b [f(x)-P_n(x)]dx$$

$$=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)dx$$

积分中值定理：

设$f(x),g(x)\in C_{[a,b]}$且$g(x)$在$[a,b]$上不变号，则$\exists\xi\in[a,b]$，满足：

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

❑ 稳定性

1 Cotes系数的特点

$$\because I_n=(b-a)\cdot\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}f(x_k)\text{对}f(x)=1\text{精确成立}$$

$$\therefore \int_a^b 1dx=(b-a)\cdot\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}=1$$

由Cotes系数表，看到：

当$n\le 7$时，$C_k^{(n)}$全为“正数”；

当$n\ge 8$时，$C_k^{(n)}$中“有正有负”。

2 舍入误差

设$f(x_k)$为精确值，而$\tilde{f}(x_k)$为$f(x_k)$的近似值，误差$\varepsilon_k = f(x_k) - \tilde{f}(x_k)$

由此引起的计算误差为：

$$\left|I_n - \tilde{I}_n\right| = \left|(b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k) - (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} \tilde{f}(x_k)\right|$$

$$= (b-a)\left|\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)}[f(x_k) - \tilde{f}(x_k)]\right| = (b-a)\left|\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)}\varepsilon_k\right|$$

$$\le (b-a)\sum_{k=0}^{n}\left|C_k^{(n)}\right|\cdot\left|\varepsilon_k\right| \le (b-a)\varepsilon\sum_{k=0}^{n}\left|C_k^{(n)}\right|$$

其中$\varepsilon = \max\{|\varepsilon_k|\}$.

$\therefore$ 当$n \le 7$时，$C_k^{(n)} > 0$，有 $\left|I_n - \tilde{I}_n\right| \le (b-a)\varepsilon$，即误差没有放大，稳定。

当$n \ge 8$时，$C_k^{(n)} > 0 \ or < 0$，

$$(b-a)\varepsilon\sum_{k=0}^{n}\left|C_k^{(n)}\right| \ge (b-a)\varepsilon\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} = (b-a)\varepsilon$$

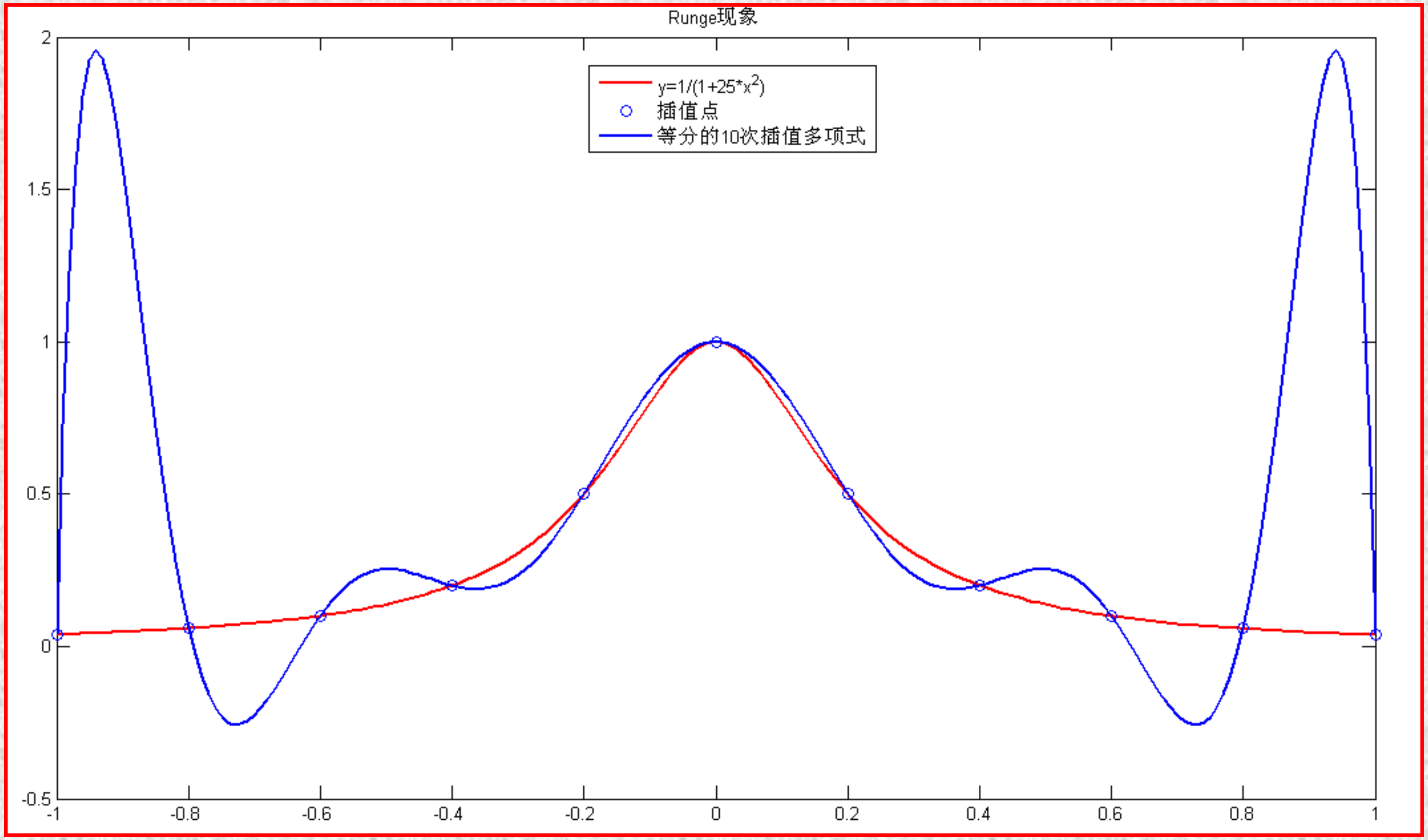
性质：$\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} = 1$

即误差可能被放大，不稳定。

□ 收敛性　收敛性无保证，即 $\lim_{n\to+\infty}|I-I_n|$ 不一定 0

即：高阶公式代数精度高，但效果不一定好！

如计算$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+25x^2}dx$的近似值：



§3 复化求积法

一 基本思想

利用$f(x)$的低次分段插值多项式代替$f(x)$进行积分！

将积分区间$[a,b]$分割为n等份，各节点$x_k=a+kh\ (k=0,1,\cdots,n), h=\dfrac{b-a}{n}$，则

$$I=\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$$

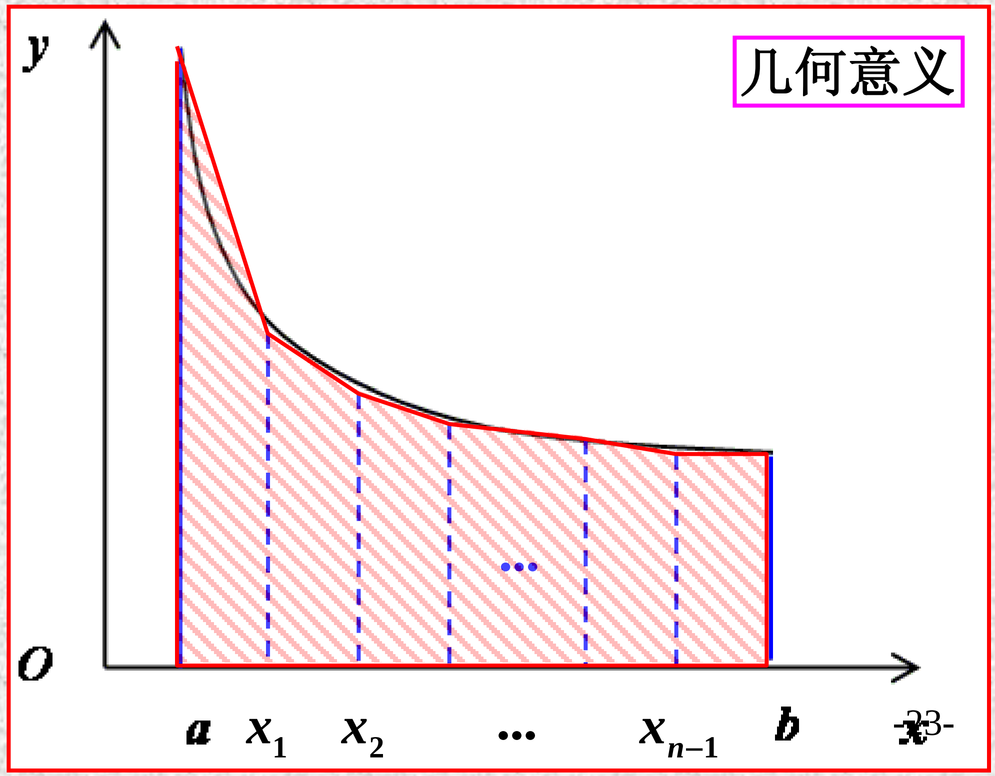
1 复化梯形公式

$$I=\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$$

$$\approx\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]$$

$$=\frac{b-a}{2n}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)]$$

$$=T_n$$



2 复化Simpson公式

$$[x_k,x_{k+1}] \xlongequal{2等分} [x_k,x_{k+1/2}]\cup[x_{k+1/2},x_{k+1}]$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{6}[\boxed{f(x_k)+4f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})}]$$

$$= \frac{b-a}{6n}[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)]$$

其中$x_{k+\frac{1}{2}} = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$

3 复化Cotes公式

$$x_{k+1/4} = x_k + \frac{1}{4}h$$

$$C_n = \frac{b-a}{90n}\left[7f(a)+\sum_{k=0}^{n-1}[32f(x_{k+\frac{1}{4}})+12f(x_{k+\frac{2}{4}})\right.$$

$$\left.+32f(x_{k+\frac{3}{4}})]+14\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+7f(b)\right]$$

例1 已知$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$的数据，用复化求积法求$I=\int_0^1 \dfrac{\sin x}{x}dx$的近似值。

复化梯形公式：$n=8, h=\dfrac{1}{8}$

$$T_8=\frac{1}{16}[f(0)+2\sum_{k=1}^{7} f(x_k)+f(1)]$$

$=0.94569086$ 精度最低

复化Simpson公式：$n=4, h=\dfrac{1}{4}$

$$S_4=\frac{1}{24}[f(0)+4\sum_{k=0}^{3} f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{3} f(x_k)+f(1)]$$

$=0.94608331$ 精度次高

复化Cotes公式：$n=2, h=\dfrac{1}{2}$

$$C_2=\frac{1}{180}[7f(0)+\sum_{k=0}^{1}[32f(x_{k+\frac{1}{4}})+12f(x_{k+\frac{2}{4}})+32f(x_{k+\frac{3}{4}})]+14\sum_{k=1}^{1} f(x_k)+7f(1)]$$

$=0.94608307$ 精度最高

i	x_i	$f(x_i)$	T_8	S_4	C_2
0	0	1	x_0	x_0	x_0
1	0.125	0.99739787	x_1	$x_{0+1/2}$	$x_{0+1/4}$
2	0.25	0.98961584	x_2	x_1	$x_{0+1/2}$
3	0.375	0.97672674	x_3	$x_{1+1/2}$	$x_{0+3/4}$
4	0.5	0.95885108	x_4	x_2	x_1
5	0.625	0.93615564	x_5	$x_{2+1/2}$	$x_{1+1/4}$
6	0.75	0.90885168	x_6	x_3	$x_{1+1/2}$
7	0.875	0.87719257	x_7	$x_{3+1/2}$	$x_{1+3/4}$
8	1	0.84147098	x_8	x_4	x_2

注：精确值$I=\int_0^1 \dfrac{\sin x}{x}dx=0.946083070367183\cdots$

4 复化求积公式余项

$[a,b]$上的求积余项	$[x_{k-1},x_k]$上的求积余项	复化公式的余项
$R(T)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$	$R(T_k)=-\frac{h}{12}\cdot h^2\cdot f''(\eta_k)$	$R(T_n)=-\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta)$
$R(S)=-\frac{b-a}{180}(\frac{b-a}{2})^4 f^{(4)}(\eta)$	$R(S_k)=-\frac{h}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta_k)$	$R(S_n)=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)$
$R(C)=-\frac{2(b-a)}{945}(\frac{b-a}{4})^6 f^{(6)}(\eta)$	$R(C_k)=-\frac{2h}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6 f^{(6)}(\eta_k)$	$R(C_n)=-\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6 f^{(6)}(\eta)$

以复化梯形公式为例证明:

$[a,b]$上的求积余项	$[x_{k-1},x_k]$上的求积余项	复化公式的余项
$R(T)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$	$R(T_k)=-\frac{h}{12}\cdot h^2\cdot f''(\eta_k)$	$R(T_n)=-\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta)$

设函数$f(x)\in C^2[a,b]$,则复化梯形公式求积余项为:

$$I-T_n=\int_a^b f(x)dx-T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)dx-\sum_{k=0}^{n-1}T_k=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)dx-T_k\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}R(T_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{h^3}{12}\cdot f''(\eta_k)\right)=-\frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1}f''(\eta_k)=-\frac{h^2}{12}\cdot\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}f''(\eta_k)$$

$\because\ f''(x)$在$[a,b]$上连续

$\therefore\ f''(x)$在闭区间$[a,b]$内有最大、最小值m和M,即$m\le f''(x)\le M$.

$$\therefore n\cdot m\le\sum_{k=0}^{n-1}f''(\eta_k)\le n\cdot M,\quad m\le\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f''(\eta_k)}{n}\le M$$

由连续函数的介值定理,$\exists\eta\in[a,b]$,使得 $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f''(\eta_k)}{n}=f''(\eta)$

$$\therefore I-T_n=-\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta)$$

二 变步长复化求积法

❑复化求积公式存在的问题

复化求积法是提高精度的有效方法，但是由于$f(x)$表达式往往未知，在给定精度条件下，步长h难以确定！

- ✓ h太大，精度达不到；
- ✓ h太小，计算量大！

❑ 变步长复化求积法的基本思想

先选择一个较大的步长，对结果进行精度估计，若不满足精度则步长缩小一半，直到满足精度要求。

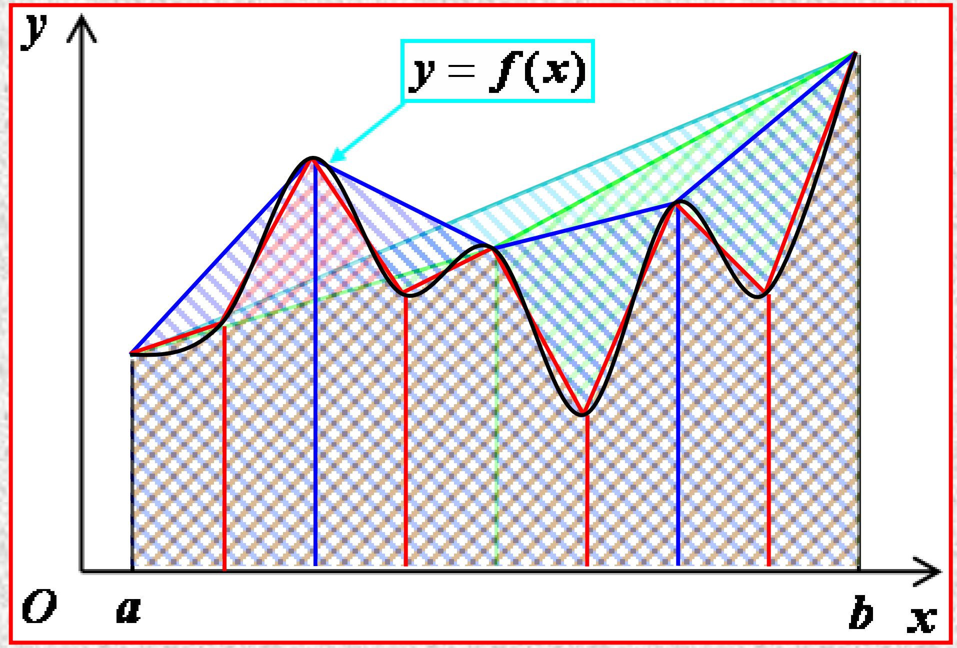
❑ 需要考虑的问题

- ✓ 如何判断结果的精度？
- ✓ 在h减半的情况下，如何节省计算量？

☝计算结果精度的如何判定？

$$\because R(T_n)=I-T_n=-\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta)$$

$$\therefore \frac{I-T_n}{I-T_{2n}}=\frac{-\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta_1)}{-\frac{(h/2)^2}{12}(b-a)f''(\eta_2)}\approx 4$$



$$\therefore I-T_{2n}\approx\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$$

含义：以T_{2n}作为I的近似值，误差大概为

$$\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$$

T_1，T_2，T_4，T_8，……

直至满足：？$|T_{2n}-T_n|\le\varepsilon$

精度判定的条件：$"|T_{2n}-T_n|<\varepsilon"\ or\ "\frac{|T_{2n}-T_n|}{|T_{2n}|}<\varepsilon"$

✌ 步长h减半后，如何节省量？

n等分积分区间$[a,b]$时，在$[x_k, x_{k+1}]$上

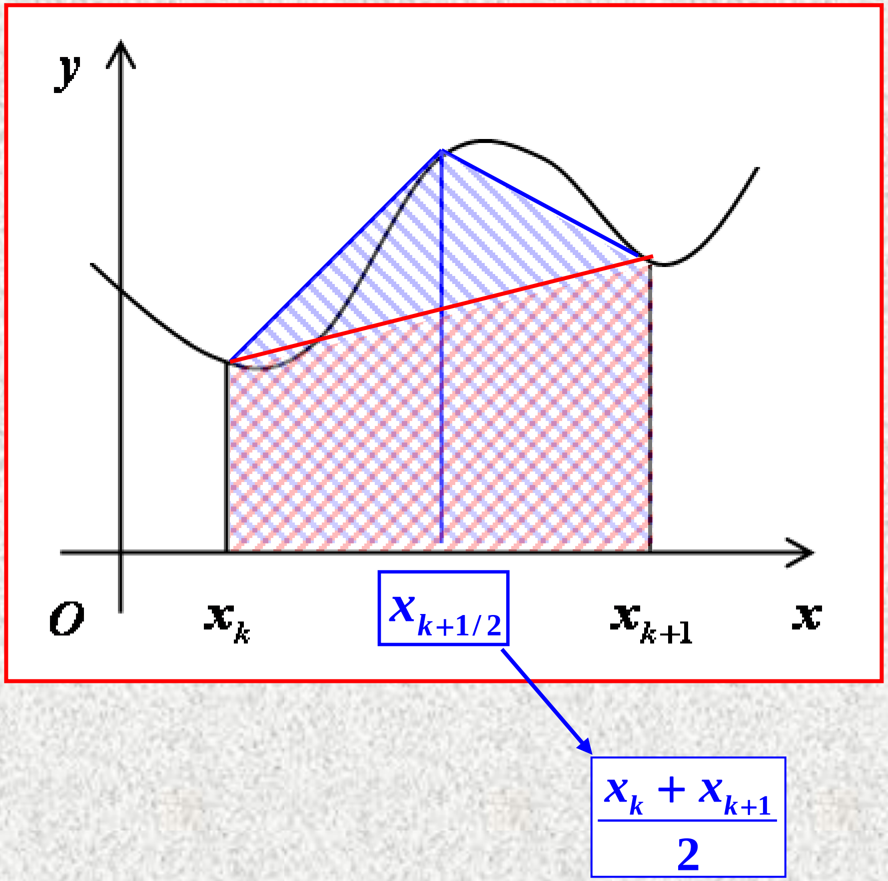
$$T_n^{(k)} = \frac{h_n}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})]$$

$2n$等分积分区间$[a,b]$后，在$[x_k, x_{k+1}]$上

$$T_{2n}^{(k)} = \frac{h_n/2}{2}[f(x_k) + 2f(x_{k+1/2}) + f(x_{k+1})]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{h_n}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})]\right] + \frac{h_n}{2} f(x_{k+1/2})$$

$$= \frac{1}{2}T_n^{(k)} + \frac{h_n}{2} f(x_{k+1/2})$$



$$T_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} T_{2n}^{(k)} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}T_n^{(k)} + \frac{h_n}{2} f(x_{k+1/2})\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(T_n^{(k)}\right) + \frac{h_n}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_{k+1/2})\right)$$

$$= \frac{1}{2}T_n + \frac{h_n}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1/2})$$

即：步长减半后，只需“加”算$f(x_{k+1/2})$。

三 Romberg积分法

❑ 回顾

✓复化公式的求积余项

$$R(T_n) = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta)$$

$$R(S_n) = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)$$

$$R(C_n) = -\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6 f^{(6)}(\eta)$$

✓复化梯形公式的事后误差估计

$$I - T_{2n} \approx \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

✓T_{2n}与T_n之间的关系

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h_n}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1/2})$$

❑ T_n与S_n、S_n与C_n之间的关系

✓ $\because I-T_{2n}\approx\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$ 即：$\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$可看成是T_{2n}的误差估计

$\therefore$若记$\bar{T}\triangleq T_{2n}+\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$，则可以"期待" $\bar{T}$ 比 T_{2n}有更好的精度

事实上，在$[x_k,x_{k+1}]$上有：

$$T_n^{(k)}=\frac{h_n}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]$$

$$T_{2n}^{(k)}=\frac{h_n/2}{2}[f(x_k)+2f(x_{k+1/2})+f(x_{k+1})]$$

$$S_n^{(k)}=\frac{h_n}{6}[f(x_k)+4f(x_{k+1/2})+f(x_{k+1})]$$

显然满足：$S_n^{(k)}=T_{2n}^{(k)}+\frac{1}{3}(T_{2n}^{(k)}-T_n^{(k)})=\frac{4}{3}T_{2n}^{(k)}-\frac{1}{3}T_n^{(k)}$

$\therefore$在$[a,b]$上利用复化的Simpson公式有：

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}S_n^{(k)}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{4}{3}T_{2n}^{(k)}-\frac{1}{3}T_n^{(k)}\right)=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$$

$$R(S_n)=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)$$

$$R(C_n)=-\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6 f^{(6)}(\eta)$$

✓类似地：$\because \dfrac{I-S_n}{I-S_{2n}}=\dfrac{-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta_1)}{-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h/2}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta_2)}\approx 16$

$$\therefore I-S_{2n}\approx\frac{1}{15}(S_{2n}-S_n)$$

$\therefore$ 可以期待$\overline{S}_{2n}\triangleq S_{2n}+\dfrac{1}{15}(S_{2n}-S_n)$具有更高精度

事实上，$C_n=S_{2n}+\dfrac{1}{15}(S_{2n}-S_n)$

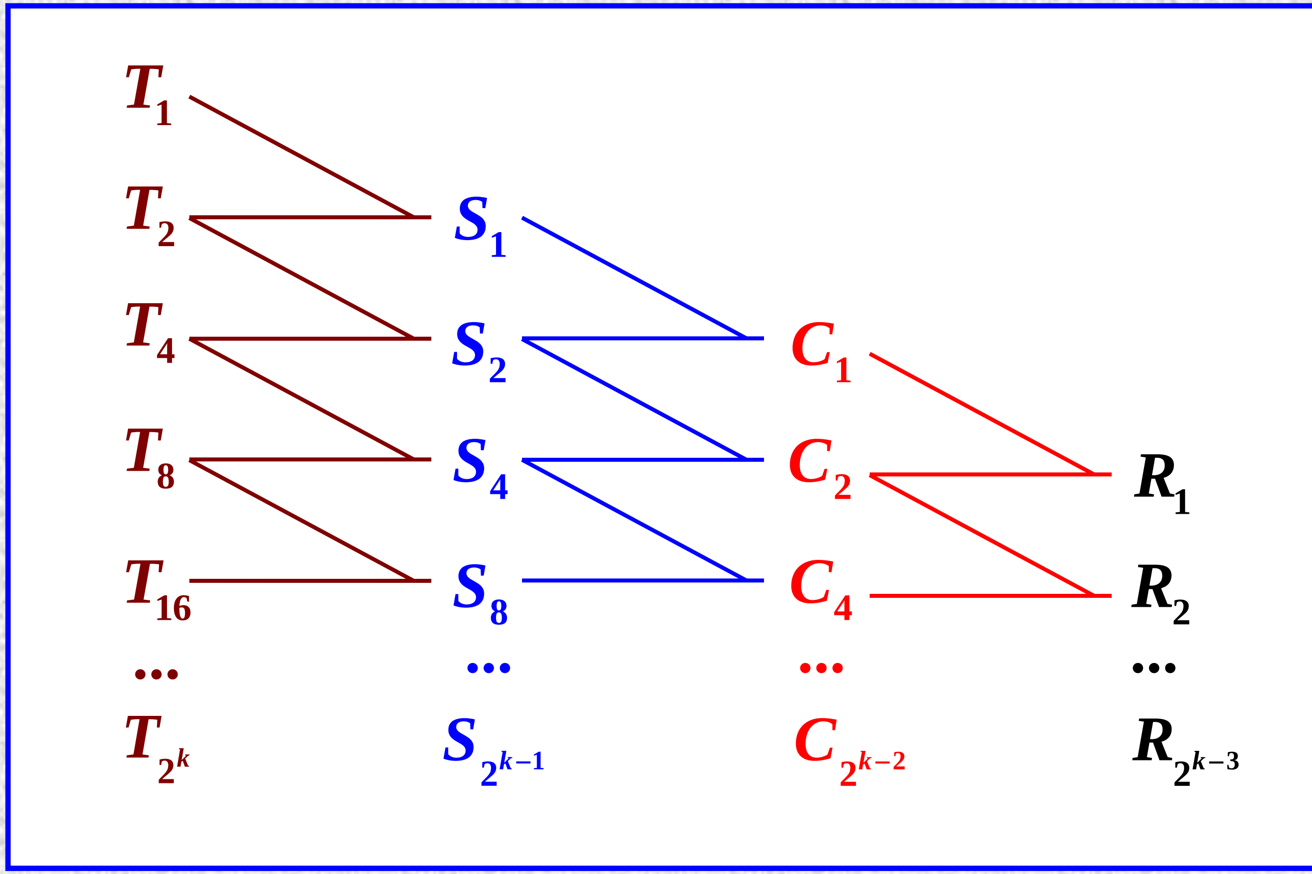
✓利用插值余项类似可得

$$\therefore I-C_{2n}\approx\frac{1}{63}(C_{2n}-C_n)$$

若记：$R_n\triangleq C_{2n}+\dfrac{1}{63}(C_{2n}-C_n)$

则可以"期待"R_n比C_{2n}精度更高，称为龙贝格公式。

❑ Romberg公式计算过程



§5 Gauss型求积公式

❑ 问题

插值型求积公式

$$I=\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

代数精度至少为$n-1$.

问：✓ 最高可达多少？

✓ 如何构造这样的公式？

❑基本结论和概念

1. 只要适当选取求积节点x_k，精度最高可达$2n-1$;

2. 具有最高精度的插值求积公式，称为Guass公式；此时的求积节点x_k称为Gauss点。

3. 设$f(x),g(x)\in C[a,b]$,若$\int_a^b f(x)g(x)dx=0$,则称$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上正交。

4. 定理 〖P119 - Th1〗

插值型求积公式$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n}A_k f(x_k)$，节点$x_k$是Gauss点

$\Leftrightarrow\int_a^b p(x)\omega(x)dx=0$，其中$\omega(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)$ ，$p(x)$为一切次数$\le n-1$的多项式。

注：求Gauss点等价于求一个与所有次数$\le n-1$的多项式都正交的n次多项式，其n个互异零点即为Gauss点。

❑ 高斯–勒让德求积公式

1. 勒让德多项式

1）三项递推关系

$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\quad \cdots\cdots$

$$P_{n+1}(x)=\frac{1}{n+1}[(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)]$$

2）性质

✓ $$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \frac{2}{2n+1}, & m=n\end{cases}$$

✓ $P_n(x)$在$[-1,1]$上与任意次数$\leq n-1$的多项式都正交；

✓ $P_n(x)$在$[-1,1]$上有n个互异零点。

2. 几个低阶公式

✓ 一点高斯–勒让德公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 2f(0)$

✓ 两点高斯–勒让德公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$

3. 一般区间[a,b]上的高斯公式

$$\int_a^b f(x)dx \overset{x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}}{=\!=\!=\!=} \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2})dt$$

✓ 一点高斯–勒让德公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) f(\frac{b+a}{2})$$

✓ 两点高斯–勒让德公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(-\frac{b-a}{2\sqrt{3}}+\frac{b+a}{2}) + f(\frac{b-a}{2\sqrt{3}}+\frac{b+a}{2})]$$

例1　用两点高斯公式计算$\int_{-5}^{1}\frac{1}{(x+2)^2+1}dx$的近似值。

解　$\int_{-5}^{1}\frac{1}{(x+2)^2+1}dx \overset{x=3t-2}{=\!=} 3\int_{-1}^{1}\frac{1}{9t^2+1}dt$

$$\approx 3\left[\frac{1}{9(-\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}+\frac{1}{9(\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}\right]$$

$$=3\times\frac{2}{4}$$

$$=\frac{3}{2}$$

4. 稳定性和收敛性

定理5. 3　Gauss型求积公式是数值稳定的；

定理5. 4　如果被积函数是连续函数, 则Gauss型求积公式是收敛的.