第四讲

确界原理

确界存在性定理

定理1.1（确界原理）

设$S \subset \mathbf{R}$, $S \neq \varnothing$. 若 S 有上界, 则 S 必有上确界;

若 S 有下界, 则 S 必有下确界.

该定理作为公理, 不予证明.

例1 设 A, B 为非空数集. 满足:

$$\forall\, x \in A, \forall\, y \in B, \text{有 } x \le y.$$

证明：数集 A 有上确界，数集 B 有下确界，且 $\sup A \le \inf B$.

证 由假设, B 中任一数 y 都是 A 的上界, A 中的任一数 x 都是 B 的下界. 因此由确界原理, A 有上确界, B 有下确界.

由定义, 上确界 $\sup A$ 是最小的上界，因此，任意 $y \in B$; $\sup A \le y$. 这样，$\sup A$ 又是 B 的一个下界，而 $\inf B$ 是最大的下界，因此 $\sup A \le \inf B$.

例2 设 S 是 R 中非空有上界的数集，

(i) 若 $a \in \mathbf{R}$, 定义 $S+a=\{x+a \mid x \in S\}$,则

$$\sup\{S+a\}=\sup S+a;$$

(ii) 若 $b>0$, 定义 $bS=\{bx \mid x \in S\}$, 则

$$\sup\{bS\}=b \cdot \sup S.$$

证 (i) $\forall x+a \in S+a$, 其中 $x \in S$, 必有 $x \le \sup S$,

于是 $$x+a \le \sup S+a.$$

$\forall \varepsilon>0$, $\exists\, x_0 \in S$, 使 $x_0>\sup S-\varepsilon$, 从而

$$x_0+a \in S+a,$$

且 $$x_0+a>(\sup S+a)-\varepsilon,$$

因此 $$\sup(S+a)=\sup S+a.$$

(ii) $\forall\, bx \in bS$，其中 $x \in S$，必有 $x \le \sup S$，于是

$$bx \le b \sup S.$$

$\forall \varepsilon > 0$, 令 $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{b} > 0$，则存在 $x_0 \in S$，使

$$x_0 > \sup S - \varepsilon',$$

因此

$$bx_0 > b \sup S - b\varepsilon' = b \sup S - \varepsilon.$$

这就证明了

$$\sup\{bS\} = b \sup S.$$

(ii) 若 $b>0$, 定义 $bS = \{bx \mid x \in S\}$, 则

$$\sup\{bS\} = b \cdot \sup S.$$

非正常确界

1. 规定 (i) $\forall a \in \mathrm{R},\ -\infty < a < +\infty;$

(ii) 若 S无上界，记 $\sup S = +\infty.$

若 S无下界， 记 $\inf S = -\infty.$

2. 推广的确界原理：非空数集必有上、下确界.

例3 $\sup \mathrm{N} = +\infty,$

$$\inf\{-2^n \mid n \in \mathrm{N}_+\} = -\infty.$$

例4 设数集 $A \subset \mathbf{R}_+, B = \left\{ \frac{1}{x} \,\middle|\, x \in A \right\}$.

证明: $\sup A = +\infty$ 的充要条件是 $\inf B = 0$.

证 若 $\sup A = +\infty$. 显然 $\forall\, x \in B,\ x > 0$. $\forall \varepsilon > 0$,

令 $M = \frac{1}{\varepsilon}$, 则由于 $\sup A = +\infty$, $\exists\, x_0 \in A,\ x_0 > M$.

于是 $y_0 = 1/x_0 \in B$, 且 $y_0 < \varepsilon$.

因此 $\inf B = 0$.

反之, 若 $\inf B = 0$, 则 $\forall M > 0$,

令 $\varepsilon = 1/M$, $\exists\, x_0 \in B,\ x_0 < \varepsilon$. 于是

$$y_0 = 1/x_0 \in A,\ \text{且}\ y_0 > M.$$

因此 $\sup A = +\infty$.