第十三讲

带有拉格朗日余项的泰勒公式

带有拉格朗日型余项的泰勒公式

前面讲的带有佩亚诺型余项的泰勒公式实际上是有限增量公式的一个推广，它只是定性地告诉我们用泰勒多项式去替代函数，其误差为

$$o((x-x_0)^n).$$

下面给出一个定量形式的泰勒公式.

定理6.10（泰勒定理）

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在直 到 n 阶连续导函数，在 (a,b) 内存在 $(n+1)$ 阶导数，则对 $\forall x, x_0 \in [a,b]$，存在 $\xi \in (a,b)$，使

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad (5)$$

或者 $$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

其中 $T_n(x)$ 是 $f(x)$ 在点 x_0 的 n 阶泰勒多项式.

证 设 $G(t)=(x-t)^{n+1}$,

$$F(t)=f(x)-[f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n];$$

只要证明

$$F(x_0)=f(x)-T_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}G(x_0).$$

不妨设 $x>x_0$, 则 $F(t)$, $G(t)$ 在 $[x_0,x]$ 上连续，在 (x_0,x) 上可导, 且

$$G'(t)=-(n+1)(x-t)^n\neq 0,\ t\in[x_0,x).$$

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n,\ F(x)=G(x)=0.$$

由柯西中值定理

$$\frac{F(x_0)}{G(x_0)}=\frac{F(x_0)-F(x)}{G(x_0)-G(x)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},\ \xi\in(x_0,x)\subset(a,b),$$

于是得到

$$f(x)=T_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

我们称

$$R_n(x)=f(x)-T_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

为 $f(x)$ 在点 x_0 的 n 阶拉格朗日型余项.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (5)$$

称为 $f(x)$ 在点 x_0 的带有**拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式.**

请比较公式 (5) 与拉格朗日中值定理.

因 ξ 介于 x_0 与 x 之间, 故存在正数 $\theta\,(0<\theta<1)$,

使得 $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$, 所以$R_n(x)$又可写成

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

当 $x_0 = 0$ 时, 公式 (5) 成为

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad (6)$$

公式 (6) 称为带有拉格朗日型余项的麦克劳林公式.

公式 (3) 与公式 (5) 都是泰勒公式, 并且前面部分均为泰勒多项式，而不同的是 $R_n(x)$ 的表达形式不一样．读者在应用时, 需根据不同情况选择合适形式的余项.

例1 中六个公式的余项均为佩亚诺型的，现在将它们改写为带有拉格朗日型余项的公式：

(i) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$
$$(0 < \theta < 1,\ x \in (-\infty, +\infty)).$$

(ii) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$
$$+(-1)^m \frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1},\ (0 < \theta < 1,\ x \in (-\infty, +\infty)).$$

(iii) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$
$$+(-1)^{m+1}\frac{\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2},\ (0 < \theta < 1,\ x \in (-\infty, +\infty)).$$

(iv) $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},(0<\theta<1,\ x>-1).$$

(v) $$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1},$$

$$(0<\theta<1,\ x>-1).$$

(vi) $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}},$$

$$(0<\theta<1,\ x>-1).$$

这里仅对公式 (iii) 进行验证, 其余 5 个请读者自证.

设 $f(x)=\cos x$, 则

$$f^{(k)}(x)=\cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ k=0,1,2,\cdots.$$

于是

$$f(0)=1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=-1,\ f'''(0)=0,$$

$$\cdots\cdots\ \cdots\cdots$$

$$f^{(2m)}(0)=(-1)^m,\quad f^{(2m+1)}(0)=0,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+(-1)^{m+1}\frac{\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2}$$

$$f^{(2m+2)}(\theta x)=\cos(\theta x+(m+1)\pi)=(-1)^{m+1}\cos\theta x.$$

从而有

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

$$+\frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!}\cos\theta x\cdot x^{2m+2},\quad (0<\theta<1,\ x>-1).$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+(-1)^{m+1}\frac{\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2}$$