数学分析　第四章
函数的连续性

§1 连续性概念

连续函数是数学分析中着重讨论的一类函数.

一、函数在一点的连续性

二、间断点的分类

三、区间上的连续函数

*点击以上标题可直接前往对应内容

第一讲

函数连续的概念

函数在一点的连续性

定义1

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，且

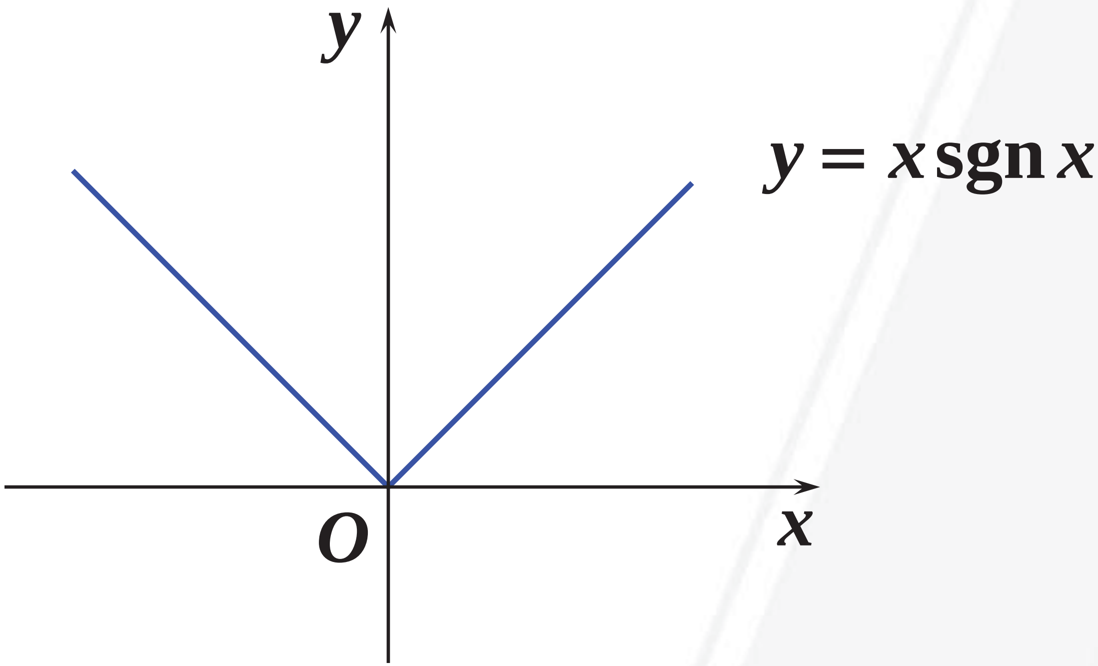
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{1}$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

由定义1知，我们是通过函数的极限来定义连续性的，换句话说连续就是指 $f(x)$ 在点 x_0 的极限不仅存在，而且其值恰为 $f(x)$ 在点 x_0 的函数值 $f(x_0)$.

例如：$f(x)=x\operatorname{sgn}x$ 在 $x=0$ 处连续，这是因为

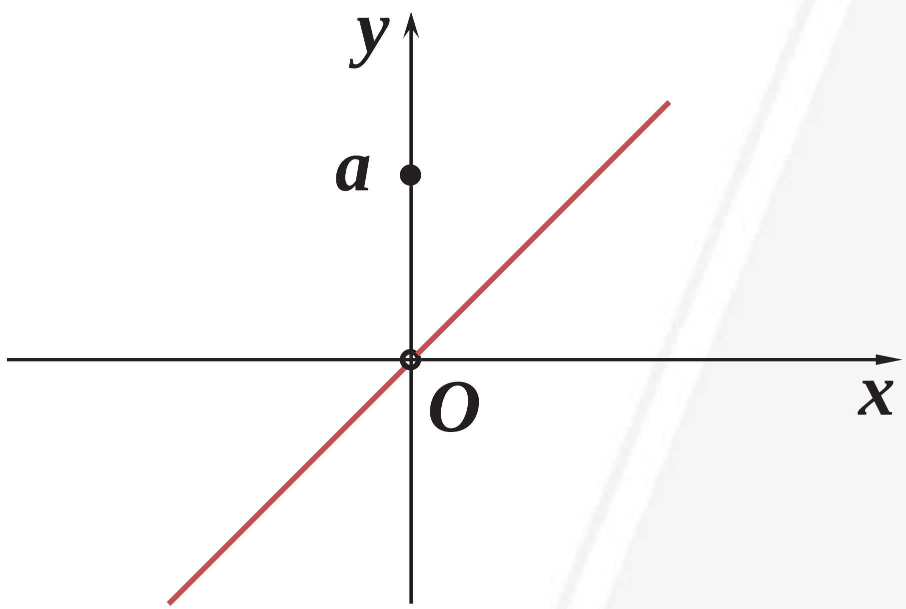
$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{sgn}x=0=f(0).$$



又如：函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases} \quad (a\neq 0)$$

在$x=0$处不连续，这是因为$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0\neq f(0)$.



函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x$ 在点 $x=0$ 处不连续，这是因为极限 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn} x$ 不存在.

由极限的定义，定义1可以叙述为：对于任意正数ε，存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon. \tag{2}$$

注意到 ⑵ 式在$x=x_0$时恒成立，因此$0<|x-x_0|<\delta$可改写为$|x-x_0|<\delta$，这样就得到函数 $f(x)$ 在点x_0连续的$\varepsilon-\delta$定义.

定义2

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义. 如果对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

下面是连续性的另外一种表达形式. 请比较.

设 $\Delta x=x-x_0$,

$$\Delta y=y-y_0=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

则函数在点 x_0 连续的充要条件是:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0. \tag{3}$$

这里我们称 Δx 是自变量(在 x_0 处)的增量, Δy为相应的函数(在 y_0 处)的增量.

例1 证明 $f(x)=xD(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 其中 $D(x)$ 为狄利克雷函数.

证 因为 $f(0)=0,\ |D(x)|\le 1,\ \lim\limits_{x\to 0} x=0,$ 所以

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} xD(x)=0=f(0).$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

注意:上述极限式绝不能写成

$$\lim_{x\to 0} xD(x)=\lim_{x\to 0} x\lim_{x\to 0} D(x)=0.$$

由上面的定义和例题应该可以看出: 函数在点 x_0 有极限与在点 x_0 连续是有区别的. 首先 $f(x)$ 在点 x_0 连续，那么它在点 x_0 必须要有极限(这就是说, 极限存在是函数连续的一个必要条件), 而且还要求这个极限值只能是函数在该点的函数值.

类似于左、右极限，下面引进左、右连续的概念.

定义3

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个右邻域 $U_+(x_0)$ (左邻域 $U_-(x_0)$) 有定义，若

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)\quad \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)\right),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 右(左)连续.

很明显,由左、右极限与极限的关系以及连续函数的定义可得：

定理4.1

函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是：f 在点 x_0 既是左连续，又是右连续.

例2 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ x+a, & x>0 \end{cases}$$ 在 $x=0$ 处的连续性.

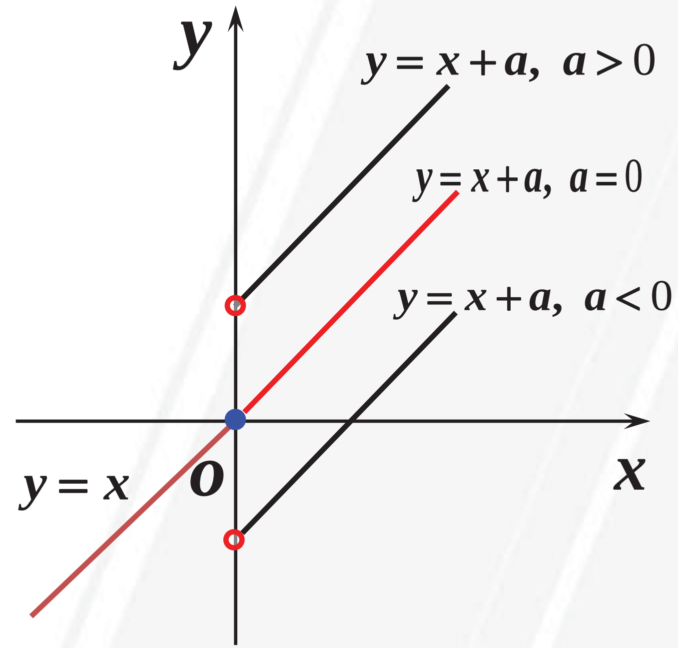
解 因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x=0=f(0),$$

所以 f 在 $x=0$ 处左连续.

又因为

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+a)=a,$$

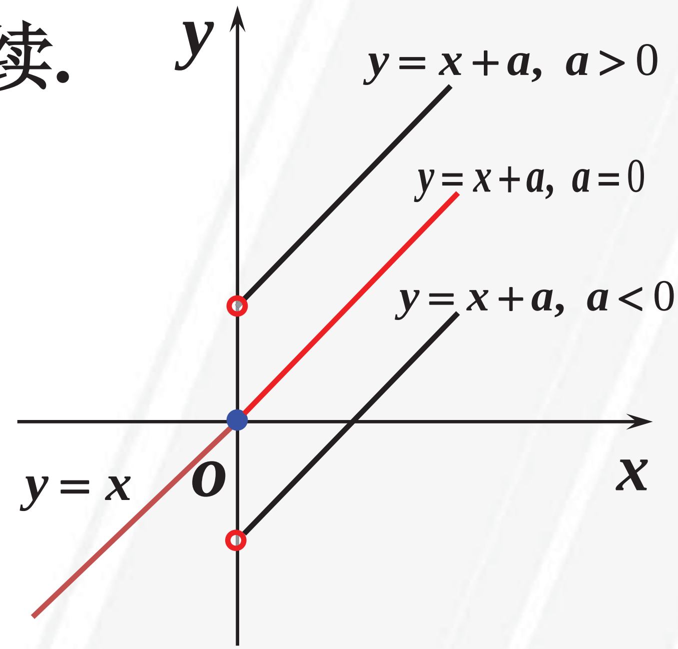


所以，当 $a\neq 0$ 时，f 在 $x=0$ 处不是右连续的;

当 $a=0$ 时，f 在 $x=0$ 处是右连续的.

综上所述， 当 $a=0$ 时, f 在 $x=0$ 处连续;

当 $a\neq 0$ 时, f 在 $x=0$ 处不连续.



$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+a)=a$$