数学分析　第二章
数列极限

数列极限是整个数学分析最重要的基础之一，它不仅与函数极限密切相关，而且为今后学习级数理论提供了极为丰富的准备知识.

§1 数列极限的概念

*点击以上标题可直接前往对应内容

第一讲

数列极限的概念 1

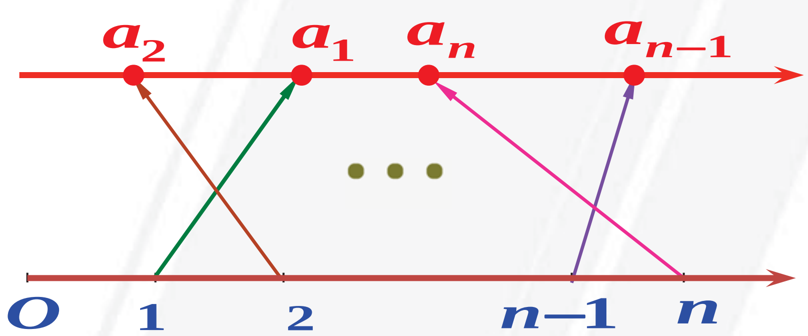
数列的定义

若函数 f 的定义域为全体正整数的集合 $\mathbf{N}_+$, 则称

$$f:\mathbf{N}_+\to\mathbf{R} \text{ 或 } f(n),\ n\in\mathbf{N}_+$$

为数列. 因为$\mathbf{N}_+$的所有元素可以从小到大排列出来, 所以我们也将数列写成

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots,$$



或简记为 $\{a_n\}$. 这里 a_n 称为数列 $\{a_n\}$ 的通项.

一个经典的例子

古代哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》引用一句话“一尺之棰,日取其半,万世不竭”. 它的意思是:一根长为一尺的木棒,每天截下一半,这样的过程可以无限制地进行下去.

我们把每天截下部分(或剩下部分)的长度列出:

第一天截下 $\frac{1}{2}$, 第二天截下 $\frac{1}{2^2}, \cdots$, 第n天截下 $\frac{1}{2^n}, \cdots$.

这样就得到一个数列:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots, \text{ 或 } \left\{\frac{1}{2^n}\right\}.$$

其通项 $\frac{1}{2^n}$ 随着 n 的无限增大而无限趋于 0.

收敛数列的定义

一般地说，对于数列 $\{a_n\}$，若当 n 无限增大时，a_n 能无限地接近某个常数 a，则称 $\{a_n\}$ 收敛于 a.

定义1

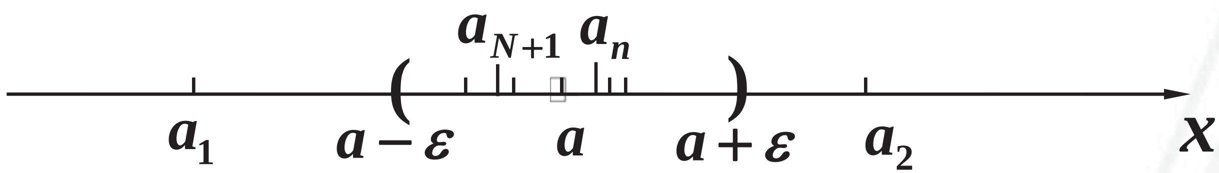
设 $\{a_n\}$为一个数列，a 为一个常数，若对于任意的正数 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列$\{a_n\}$收敛于a，又称 a 为数列 $\{a_n\}$的极限.

记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$（或 $a_n\to a,\ n\to\infty$）.

若$\{a_n\}$不收敛，则称$\{a_n\}$为发散数列.



注 定义1这种陈述方式，

通常称为“ε-N”定义.

按定义验证极限

为了加深对数列收敛定义的了解，下面结合例题加以说明.

例1 用定义验证：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0.$

分析 对于任意正数 ε，要使 $\left|\dfrac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$，只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

证 对于任意 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon\text{，所以}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

例2 用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (0<|q|<1)$.

分析 对于任意的正数 ε, 要使 $|q^n - 0| < \varepsilon$, 只要

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log |q|} \quad \text{即可.}$$

证 $\forall \varepsilon > 0$(不妨设 $0<\varepsilon<1$), 取 $N = \left[\dfrac{\log \varepsilon}{\log |q|}\right]$,

当 $n > N$ 时, 有

$$|q^n - 0| < \varepsilon.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

例3 用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3n^2-n-7}=\dfrac{1}{3}$.

分析 任给 $\varepsilon>0$, 由

$$\left|\frac{n^2}{3n^2-n-7}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{n+7}{3(3n^2-n-7)}\right|,$$

当 $n\ge 7$ 时, $n+7\le 2n$, $3n^2-n-7\ge 3n^2-2n\ge 2n^2$,

故要使 $\left|\dfrac{n+7}{3(3n^2-n-7)}\right|\le\dfrac{2n}{6n^2}=\dfrac{1}{3n}<\varepsilon$ 成立,

只要 $n>\dfrac{1}{3\varepsilon}$ 即可.

注意 解这个不等式是在 $n\ge 7$ 的条件下进行的.

证 对于任意的正数 ε，取 $N = \max\left\{7, \left[\frac{1}{3\varepsilon}\right]\right\}$，

当 $n > N$ 时，有

$$\left| \frac{n^2}{3n^2 - n - 7} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon ,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2 - n - 7} = \frac{1}{3}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2 - n - 7} = \frac{1}{3}.$$

例4 用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, 其中 $a>0$.

证 这里只验证 $a>1$的情形（$0<a<1$ 时自证）.

设 $\alpha_n=a^{\frac{1}{n}}-1$. 因为$a=(1+\alpha_n)^n\geq 1+n\alpha_n$，所以

$$\alpha_n=\sqrt[n]{a}-1\leq\frac{a-1}{n},$$

故对于任意正数ε，取 $N=\left[\dfrac{a-1}{\varepsilon}\right]$, 当 $n>N$ 时，有

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon.$$

因此证得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.