



当我们研究导函数的变化率时就产生了高阶导数. 如物体运动规律为 $s = s(t)$, 它的运动速度是 $v = s'(t)$, 而速度在时刻 t 的变化率就是物体在时刻 t 的加速度

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

第十一讲

高阶导数概念

莱布尼茨公式



高阶导数的概念

▶ 定义1

如果 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 可导, 则称 $f'(x)$ 在点 x_0 的导数为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的二阶导数, 记作 $f''(x_0)$. 此时也称 $f(x)$ 在点 x_0 二阶可导. 如果 $f(x)$ 在区间 I 上每一点都二阶可导, 则得到一个定义在 I 上的二阶导函数, 记作 $f''(x)$, $x \in I$.

仿照上述定义, 可以用 f 的 $n-1$ 阶导函数定义 f 的 n 阶导函数. 二阶及二阶以上导数称为高阶导数.



函数 f 在点 x_0 处的 n 阶导数记作

$$f^{(n)}(x_0), y^{(n)} \Big|_{x=x_0}, \frac{d^n y}{dx^n} \Big|_{x=x_0}, \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x=x_0}.$$

n 阶导函数记作

$$f^{(n)}(x) (\text{或 } f^{(n)}), y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^n f}{dx^n}.$$

这里 $\frac{d^n y}{dx^n}$ 也可写作 $(\frac{d}{dx})^n y$, 即对 y 进行了 n 次

求导运算 “ $\frac{d}{dx}$ ” (看作一个算符).



例1 求下列函数的各阶导数:

(1) $y = x^n$ (n 为正整数); (2) $y = e^x$; (3) $y = \ln x$;

解 (1) $y' = nx^{n-1}$, $y'' = n(n-1)x^{n-2}$, \dots ,

$$y^{(n)} = n!, \quad y^{(m)} = 0 \quad (m > n).$$

(2) $y' = e^x$, $y'' = e^x$,

对一切 $n \in \mathbf{N}_+$, $(e^x)^{(n)} = e^x$.

(3) $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$, $y''' = \frac{1 \cdot 2}{x^3}$, \dots ,

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}.$$



(4) $y = \sin x, y = \cos x$;

对 $y = \sin x$, 有 $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \dots,$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), n \in \mathbf{N}_+.$$

同理 $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), n \in \mathbf{N}_+.$



莱布尼茨公式

高阶导数运算法则 (可用数学归纳法验证):

$$\text{加法 } (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{乘法 } (uv)^{(n)} &= u^{(n)}v^{(0)} + C_n^1 u^{(n-1)}v^{(1)} + \cdots + \\ &C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + u^{(0)}v^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}, \quad (2) \end{aligned}$$



其中 $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$.

公式 (2) 称为莱布尼茨公式.

莱布尼茨(Leibniz,G.W. 1646-1716, 德国)



例2 求 $y = e^x \cos x$ 的三阶导数.

$$\text{解一 } y' = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x \cos x + e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y'' = e^x \cos x + e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + e^x \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= e^x \cos x + 2e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + e^x \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y''' = e^x \cos x + e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ 2e^x \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + e^x \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + e^x \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= e^x \cos x + 3e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ 3e^x \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + e^x \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$



解二 直接用莱布尼茨公式 (2) 求出 y''' .

解三 $y' = e^x \cos x - e^x \sin x$

$$= \sqrt{2} \cdot e^x \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right)$$

$$= \sqrt{2} \cdot e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$y'' = 2e^x \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{4}\right);$$

$$y''' = 2\sqrt{2} e^x \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{4}\right).$$

$$y = e^x \cos x$$



例3 讨论分段函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0, \end{cases}$ 的高阶导数.

解 分段函数要分段讨论:

当 $x > 0$ 时,

$$f'(x) = 2x, f''(x) = 2, f^{(n)}(x) \equiv 0 \quad (n \geq 3);$$

当 $x < 0$ 时,

$$f'(x) = -2x, f''(x) = -2, f^{(n)}(x) \equiv 0 \quad (n \geq 3);$$

当 $x = 0$ 时, 用左、右导数定义可得

$$f'_+(0) = f'_-(0) = f'(0) = 0,$$

由于 $f''_+(0) = 2, f''_-(0) = -2$, 因此 $f''(0)$ 不存在.



故当 $n \geq 2$ 时, $f^{(n)}(0)$ 不存在. 从而

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -2x, & x < 0; \end{cases} \quad f''(x) = \begin{cases} 2, & x > 0, \\ \text{不存在}, & x = 0, \\ -2, & x < 0; \end{cases}$$

当 $n \geq 3$ 时, $f^{(n)}(x) = 0$ ($x \neq 0$), $f^{(n)}(0)$ 不存在.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0, \end{cases}$$



讨论参变量函数 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ 的二阶导数.

它的一阶导数为 $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, 写成参数方程就是:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ dy/dx = \psi'(t) / \varphi'(t). \end{cases}$$

由此求得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi'}{\varphi'} \right) / \frac{dx}{dt} = \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right)' / \varphi'(t),$$

即
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \quad (3)$$



例4 求参变量函数 (摆线)

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad (4)$$

的二阶导数 y'' .

解法一 (公式法)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{a(1 - \cos t)'' a(t - \sin t)' - a(1 - \cos t)' a(t - \sin t)''}{[a(t - \sin t)']^3} \\ &= \frac{a^2 [\cos t(1 - \cos t) - \sin^2 t]}{a^3 (1 - \cos t)^3} = \frac{-1}{a(1 - \cos t)^2} \\ &= \frac{-1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}} = -\frac{1}{4a} \csc^4 \frac{t}{2}. \end{aligned}$$



解法二 (直接计算法)

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) / \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin t}{1 - \cos t} \right) / \frac{d}{dt} (a(t - \sin t)) \\ &= \frac{\cos t (1 - \cos t) - \sin^2 t}{(1 - \cos t)^2} \cdot \frac{1}{a(1 - \cos t)} \\ &= \frac{\cos t - 1}{a(1 - \cos t)^3} = \frac{-1}{a(1 - \cos t)^2}. \end{aligned}$$

