第六章 微分中值定理及其应用

目的：用 f' 来研究 f 的性质。微分中值定理建立了 f 与 f' 之间的桥梁。

§1　拉格朗日定理和函数的单调性

【一】 罗尔定理

定理 1 （**罗尔(Rolle)中值定理**） 若函数 f 满足如下条件：

(i) f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

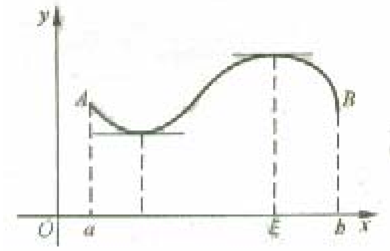
(ii) f 在开区间 (a,b) 上可导；

(iii) $f(a)=f(b)$，

则在 (a,b) 上至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=0. \tag{1}$$

几何意义：见图.



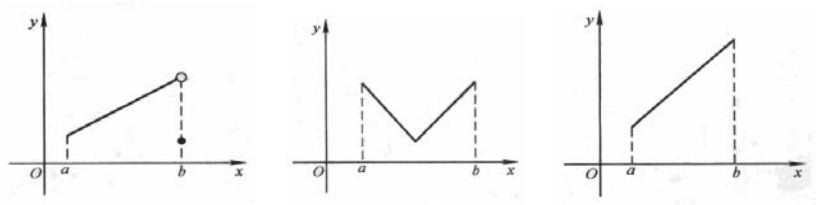
证　因为 f 在 $[a,b]$ 上连续，所以有最大值与最小值，分别用 M 与 m 表示，现分两种情况来讨论：

(1)若 $m=M$，则 f 在 $[a,b]$ 上必为常数，从而结论显然成立.

(2)若 $m<M$，则因 $f(a)=f(b)$，使得最大值 M 与最小值 m 至少有一个在 (a,b) 上的某点 ξ 处取得，从而 ξ 是 f 的极值点．由条件(ii)， f 在点 ξ 处可导，故由费马定理推知

$$f'(\xi)=0.$$

【注】 定理中的三个条件缺少任何一个，结论将不一定成立。见下图：



缺条件(i)　　缺条件(ii)　　缺条件(iii)

例 1 设a,b,c为实数。求证方程

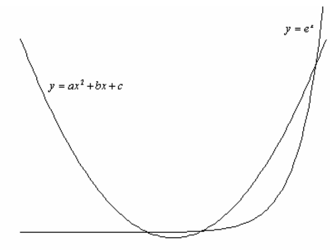
$$e^x = ax^2 + bx + c$$

的实根不超过三个.

证　令 $f(x) = e^x - \left(ax^2 + bx + c\right)$。用反证法如下：

倘若 $f(x) = 0$ 有 4 个实根：$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$，对 f 在$[x_1, x_2],[x_2, x_3],[x_3, x_4]$上用 Rolle 定理，$\exists \xi_1 \in (x_1, x_2), \xi_2 \in (x_2, x_3), \xi_3 \in (x_3, x_4)$，使得

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0,$$



再对 f' 在 $[\xi_1, \xi_2],[\xi_2, \xi_3]$ 上用 Rolle 定理，$\exists \eta_1 \in (\xi_1, \xi_2), \eta_2 \in (\xi_2, \xi_3)$，使得

$$f''(\eta_1) = f''(\eta_2) = 0$$

再对 f'' 在$[\eta_1, \eta_2]$上用 Rolle 定理，$\exists x_0 \in (\eta_1, \eta_2)$，使得

$$f'''(x_0) = 0$$

但 $f'''(x) = e^x > 0$，矛盾。

例 2 设 f 在$[a,b]$上可导，且 $f(a) = f(b) = 0$，证明$\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$f(\xi) + f'(\xi) = 0$$

证 令$F(x) = e^x f(x)$，对F 在$[a,b]$上用 Rolle 定理即得证。

【思考】设 f 在$[a,b]$上可导，且 $f(a) = f(b) = 0$，证明：$\forall \alpha \in R$，$\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$\alpha f(\xi) = f'(\xi)$$

[作辅助函数 $F(x)=e^{-\alpha x}f(x)$]

例 3 设 f 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，$f(0)=f(1)=0$，且存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $f(x_0)>x_0$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=1$

证 令 $F(x)=f(x)-x$，$F(0)=0,F(1)=-1,F(x_0)>0$，由根的存在定理，$\exists\xi_1\in(x_0,1)$，使得 $F(\xi_1)=0$。在 $[0,\xi_1]$ 上对 F 用 Rolle 定理，$\exists\xi\in(0,\xi_1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=1$。

【二】 拉格朗日定理

定理 2（拉格朗日(Lagrange)中值定理） 若函数 f 满足如下条件：

(i) f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(ii) f 在开区间 (a,b) 内可导，

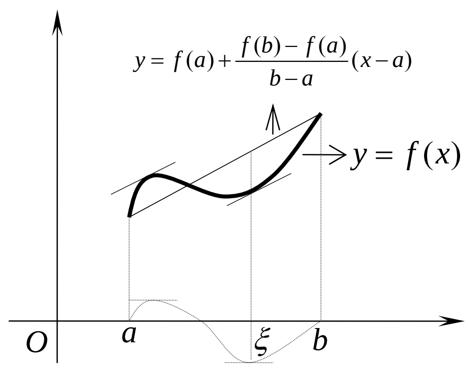
则在 (a,b) 上至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{2}$$

显然，特别当 $f(a)=f(b)$ 时，本定理的结论(2)即为罗尔定理的结论(1)．这表明罗尔定理是拉格朗日定理的一个特殊情形．其几何意义见图。

证　作辅助函数

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$



显然，$F(a)=F(b)(=0)$，且 F 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的另两个条件. 故存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

移项后即得到所要证明的（2）式。

【注】 拉格朗日公式还有下面几种等价表示形式：

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),a<\xi<b \tag{3}$$

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),0<\theta<1 \tag{4}$$

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h,0<\theta<1 \tag{5}$$

其中（4）式对 $a>b$ 也成立，（5）式对 $h<0$ 也成立。

推论 1 若函数 f 在区间 I 上可导，且 $f'(x)\equiv 0,x\in I$，则 f 为 I 上一个常量函数.

证 $\forall x_1,x_2\in I(x_1<x_2)$，在 $[x_1,x_2]$ 上用 Lag，$\exists\xi\in(x_1,x_2)$，使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0$$

这就证得 $f(x_1)=f(x_2)$，说明 f 为 I 上的常量函数。

推论 2 若函数 f 和 g 均在区间 I 上可导，且 $f'(x)\equiv g'(x),$，$x\in I$，则在区间 I 上 $f(x)$ 与 $g(x)$ 只相差某一常数，即

$$f(x)=g(x)+c\ (c\text{ 为某一常数}).$$

例 4 证明：$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2},x\in[-1,1]$

证 $(\arcsin x+\arccos x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0,x\in(-1,1)$

$$\arcsin x+\arccos x=c,x\in(-1,1)$$

取 $x=0$，得 $c=\dfrac{\pi}{2}$。直接验证所证等式对 $x=\pm1$ 也成立。

例 5 [教材例 2]证明：$\arctan b-\arctan a\le b-a$，其中 $a<b$。

证 记 $f(x)=\arctan x$，用 Lag，$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)=\frac{1}{1+\xi^2}(b-a)\le b-a$$

例 6　证明对一切 $h>-1,h\ne 0$ 成立不等式

$$\frac{h}{1+h}<\ln(1+h)<h$$

证　设 $f(x)=\ln(1+x)$，由 Lag 得

$$f(h)-f(0)=f'(\theta h)h,0<\theta<1$$

即

$$\ln(1+h)=\frac{h}{1+\theta h},0<\theta<1.$$

当 h>0 时，由 $1<1+\theta h<1+h$ 得

$$\frac{h}{1+h}<\frac{h}{1+\theta h}<h$$

当 $-1<h<0$ 时，由 $0<1+h<1+\theta h<1$ 得

$$\frac{h}{1+h}<\frac{h}{1+\theta h}<h$$

【注】特别地

$$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$$

由此可证明（作为思考）：数列

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

单调递减且有下界 0，从而极限存在，这个极限叫做 **Euler 常数** $\gamma\approx 0.5772$.

例 7 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导。若 $f(a)=f(b)=0,f'(a)f'(b)>0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$

证法 1 不妨假设 $f'(a)>0,f'(b)>0$，则由导数定义和极限保号性可知，存在 $x_1,x_2\in(a,b),x_1<x_2$，使得

$$f(x_1)>f(a)=0,f(x_2)<f(b)=0$$

而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故由介值定理可知存在 $c\in(x_1,x_2)$，使得

$$f(c)=0$$

对函数 f 在$[a,c],[c,b]$上用由罗尔定理，存在$\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，使得

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$$

对函数 f' 在$[\xi_1,\xi_2]$再用罗尔定理，存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=0$$

证法 2 不妨设 $f'(a)>0,f'(b)>0$，显然 $f(x)\not\equiv 0$，不妨设 $f(c)>0$， $a<c<b$ 。由 Lag 定理，

$$f(b)-f(c)=f'(\eta)(b-c)\Rightarrow f'(\eta)<0,c<\eta<b$$

又，对 $f'(x)$ 在$[a,\eta],[\eta,b]$上用根的存在定理

$$f'(a)>0,f'(\eta)<0\Rightarrow f'(\xi_1)=0,a<\xi_1<\eta$$

$$f'(b)>0,f'(\eta)<0\Rightarrow f'(\xi_2)=0,\eta<\xi_2<b$$

对 $f'(x)$ 在$[\xi_1,\xi_2]$上用 Rolle 定理

$$f''(\xi)=0,\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$$

证法 3（由导数介值定理证明，见下面例 16）

例 8 [习题 6.1：9**]** 设 f 在$[a,b]$上二阶可导， $f(a)=f(b)=0$，并存在一点$c\in(a,b)$使得 $f(c)>0$ 。证明$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$ 。

证 $f(x)$ 在$[a,c]$上用 Lag 定理，$\exists\xi_1\in(a,c)$，使得

$$f(c)-f(a)=f'(\xi_1)(c-a)$$

由于 $f(a)=0,f(c)>0,c-a>0$，故 $f'(\xi_1)>0$ 。

$f(x)$ 在$[c,b]$上用 Lag 定理，$\exists\xi_2\in(c,b)$，使得

$$f(b)-f(c)=f'(\xi_2)(b-c)$$

由于 $f(b)=0,f(c)>0,b-c>0$，故 $f'(\xi_2)<0$ 。

因 $a<\xi_1<c<\xi_2<b$， $f'(x)$ 在$[\xi_1,\xi_2]$上可导， $f'(x)$ 在$[\xi_1,\xi_2]$上再用 Lag 定理，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得

$$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=f''(\xi)(\xi_2-\xi_1)$$

得 $f''(\xi)<0$。

【三】 导数极限定理

定理 3 （**右侧导数极限定理**） 设函数 f 在点 x_0 的某右邻域 $[x_0,x_0+\delta)$ 上连续，在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上可导，若导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 的右极限 $f'(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$ 存在，则 f 在点 x_0 的右导数一定存在，且

$$f_+'(x_0)=f'(x_0+0). \tag{6}$$

证　任取 $x\in(x_0,x_0+\delta)$， $f(x)$ 在 $[x_0,x]$ 上满足拉格朗日定理条件，则存在 $\xi\in(x_0,x)$，使得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi) \tag{7}$$

当 $x\to x_0^+$ 时，$\xi\to x_0$，（7）式两边取极限得

$$f_+'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}f'(\xi)=\lim_{\xi\to x_0^+}f'(\xi)=f'(x_0+0)$$

【注】ξ 是 x 的函数 $\xi=\xi(x)$，这里用了变量替换法（即复合函数极限定理 1），其中三个条件是：

（1） $\lim\limits_{u\to x_0^+}f'(u)$ 存在，（2） $\lim\limits_{x\to x_0^+}\xi(x)=x_0$，（3） $\xi(x)\neq x_0$

类似可得“**左侧导数极限定理**”。

右（左）侧导数极限定理，统称为单侧导数极限定理。

（与教材不同，在分段函数求导时，实际上用的是单侧）

推论 1（**导数极限定理**）设 f 在 $U(x_0)$ 上连续，在 $U^\circ(x_0)$ 上可导，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在，则 $f'(x_0)$ 一定存在，且 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$

证　由 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$，又

$$f_+'(x_0)=f'(x_0+0),\ f_-'(x_0)=f'(x_0-0)$$

所以 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$。

推论 2　导函数的间断点一定是第二类的。

证　设 f 在 $U(x_0)$ 可导，$f'(x_0\pm 0)$ 都存在，由单侧导数极限定理

$$f'_+(x_0)=f'(x_0+0),\ f'_-(x_0)=f'(x_0-0)$$

又 $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$，所以

$$f'(x_0+0)=f'(x_0-0)=f'(x_0)$$

说明 x_0 必是 $f'(x)$ 的连续点。

推论 3 设 f 在 (a,b) 上可导，如果 f' 在 (a,b) 上单调，则 f' 在 (a,b) 上必连续。

证　由单调函数只可能有第一类间断点，又 f' 不存在第一类间断点，所以 f' 连续。

【注】 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 不存在 $\not\Rightarrow$ $f'(x_0)$ 不存在。

例如：$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，$f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x},(x\neq 0)$

$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 不存在，但 $f'(0)=0$

例 9 [教材例 3] 求分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x+\sin x^2, & x\le 0,\\ \ln(1+x), & x>0\end{cases}$$

的导数。

解　首先易得

$$f'(x)=\begin{cases}1+2x\cos x^2, & x<0,\\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0.\end{cases}$$

由于 f 在点 $x=0$ 连续，且

$$f'(0-0)=\lim_{x\to 0^-}(1+2x\cos x^2)=1,\ f'(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x}=1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=1$. 依据导数极限定理推知 f 在 $x=0$ 处可导,且 $f'(0)=1$.

例 10 求 a,b 使得

$$f(x)=\begin{cases}\ln(a+x), & x>0\\ e^x+b, & x\le 0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$。

解　f 在点 $x=0$ 处连续，$f(0+0)=f(0-0)=f(0)\Rightarrow 1+b=\ln a$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a+x}, & x>0\\ e^x, & x<0\end{cases}$$

$$f'(0+0)=\frac{1}{a}, f'(0-0)=1\Rightarrow f'_+(0)=\frac{1}{a}, f'_-(0)=1$$

f 在点 $x=0$ 处可导，$f'_+(0)=f'_-(0)\Rightarrow \dfrac{1}{a}=1$

$$a=1, b=-1, f'(0)=1$$

【四】 单调函数

定理 4　设 $f(x)$ 在区间 I 上可导,则 $f(x)$ 在 I 上递增（递减）的充要条件是

$$f'(x)\ge 0\ \ (\le 0).$$

证　　若 f 为增函数,则对每一 $x_0\in I$,当 $x\ne x_0$ 时,有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0.$$

令 $x\to x_0$，即得 $f'(x_0)\ge 0.$

反之,若 $f(x)$ 在区间 I 上恒有 $f'(x)\ge 0$,则对任意 $x_1,x_2\in I$ (设 $x_1<x_2$)，应用拉格朗日定理，存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset I$，使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\ge 0.$$

由此证得 f 在 I 上为增函数.

定理 5　若函数 f 在 (a,b) 上可导，则 f 在 (a,b) 上严格递增（严格递减）的充要条件是：

(i) 对一切 $x\in(a,b)$，有 $f'(x)\ge 0$ ($f'(x)\le 0$);

(ii) 在(a,b)的任何子区间上$f'(x)\not\equiv 0$。

证 若f在(a,b)上严格递增，由$f'(x)\ge 0$，(i)成立。现在用反证法证明(ii)成立。如果在某个子区间$I\subset(a,b)$上，$f'(x)\equiv 0$，则$f(x)\equiv c(x\in I)$，这与f在(a,b)上严格递增矛盾。

反之，由(i)知，f在(a,b)上递增。如不是严格增，即$\exists x_1,x_2\in(a,b),x_1<x_2$，使得$f(x_1)=f(x_2)$。从而$f(x)\equiv c(x\in[x_1,x_2])$，因此$f'(x)\equiv 0(x\in[x_1,x_2])$，这与条件(ii)矛盾。

推论 设函数在区间I上可导，若$f'(x)>0(f'(x)<0)$，则f在I上严格递增(严格递减).

引理（教材中的注）f在(a,b)上严格增，在点$x=a$右连续，则f在$[a,b)$上也严格增。

证 只需证$\forall x_0>a$，有$f(a)<f(x_0)$，取$a<x<x_1<x_0$，则

$$f(x)<f(x_1),\text{令}\ x\to a^+\Rightarrow f(a)\le f(x_1)$$

从而$f(a)\le f(x_1)<f(x_0)$。

例 11 讨论下面函数在 R 上的单调性：

$$（1）\ f(x)=x^3；（2）\ f(x)=x+\sin x$$

解 （1）$f'(x)=3x^2\ge 0,\ f'(x)=0$的点只有一个$x=0$，故$f$严格增。

（2）$f'(x)=1+\cos x\ge 0$，$f'(x)=0$的点为$x=2k\pi+\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，这些点不构成区间，所以故$f$严格增。

例 12 [教材例 4]设$f(x)=x^3-x$. 试讨论函数f的单调区间.

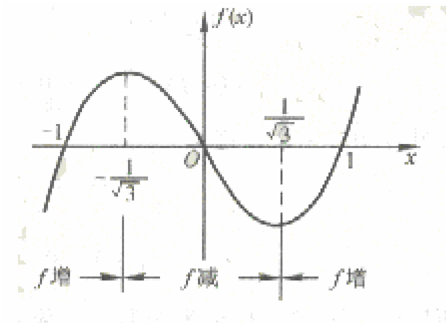
解 由于

$$f'(x)=3x^2-1=(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1),$$

$f'(x)=0\Rightarrow x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，因此

x	$(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$	$(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty)$
f'	+	−	+
f	↑	↓	↑

其大致图像如图



例 13　[教材例 5] 证明不等式

$$e^x > 1+x, x \neq 0.$$

证　记 $f(x)=e^x-1-x$，则 $f'(x)=e^x-1$．故当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，f 严格递增；当 $x<0, f'(x)<0$，f 严格递减．又由于 f 在 $x=0$ 处连续，则当 $x\neq 0$ 时，总有（参见上面引理）

$$f(x) > f(0) = 0,$$

从而证得

$$e^x > 1+x, x \neq 0.$$

例 14　证明：当 $x>0$ 时，$\sin x > x-\frac{x^3}{3!}$。

证　$$f(x)=\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right),\quad f(0)=0,$$

$$f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}, f'(0)=0,$$

$$f''(x)=x-\sin x>0(x>0),$$

$\Rightarrow f'$ 在 $[0,+\infty)$ 严格增（见引理）$\Rightarrow f'(x)>f'(0)(x>0) \Rightarrow f$ 在 $[0,+\infty)$ 严格增（见引理）$\Rightarrow f(x)>f(0)=0(x>0)$。

例 15　设 $f'(x_0)>0$。能否推出 f 在某 $U(x_0)$ 增。[总练习题：11]

答 不能。例如

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

易求得（用定义）

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$

$f'(0)=\dfrac{1}{2}>0$。

但对任意 $U(0)$，f 在 $U(0)$ 既不是增，也不是减。因为：

取 $x_n'=\pm\dfrac{1}{2n\pi+\pi}\to 0(n\to\infty)$，$f'(x_n')=\dfrac{3}{2}>0$

取 $x_n''=\pm\dfrac{1}{2n\pi}\to 0(n\to\infty)$，$f'(x_n'')=-\dfrac{1}{2}<0$

【五】 导数介值定理[达布（Darboux）定理]

定理 6（**Darboux 定理**） 若函数 f 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f_+'(a)\neq f_-'(b)$，k 为介于 $f_+'(a)$，$f_-'(b)$ 之间任一实数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=k.$$

证　设 $F(x)=f(x)-kx$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且

$$F_+'(a)\cdot F_-'(b)=(f_+'(a)-k)(f_-'(b)-k)<0.$$

不妨设 $F_+'(a)>0, F_-'(b)<0$．由导数的定义及极限的保号性，分别存在 $x_1\in U_+^0(a), x_2\in U_-^0(a)$，且　$x_1<x_2$，使得

$$F(x_1)>F(a),\quad F(x_2)>F(b).$$

因为 F 在 $[a,b]$ 上可导，所以连续．根据最值定理，存在一点 $\xi\in[a,b]$，使 F 在点 ξ 取得

最大值．由上式可知$\xi \neq a,b$。这就说明ξ是F的极大值点．由费马定理得$F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)=k,\xi\in(a,b).$$

推论　设 f 在区间 I 上可导，且 $f'(x)\neq 0(x\in I)$，则 $f'(x)>0(x\in I)$ 或 $f'(x)<0(x\in I)$，从而 f 在区间I上严格单调。

例 16（即例 7）设 f 在$[a,b]$上二阶可导。若 $f(a)=f(b)=0, f'(a)f'(b)>0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$

证　$f(a)=f(b)=0$，在$[a,b]$用 Rolle 定理

$$f'(c)=0,a<c<b$$

对 $f'(x)$在$[a,c],[c,b]$上用 Lag 定理

$$f'(c)-f'(a)=f''(\xi_1)(c-a)\Rightarrow f''(\xi_1)<0,a<\xi_1<c$$

$$f'(b)-f'(c)=f''(\xi_2)(b-c)\Rightarrow f''(\xi_2)>0,c<\xi_2<b$$

由导数介值定理，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，$f''(\xi)=0$。

§2　柯西中值定理和不定式极限

【一】 柯西中值定理

定理 1 (柯西中值定理)　设函数 f 和 g 满足:

(i)在 $[a,b]$ 上都连续;

(ii)在 (a,b) 上都可导;

(iii) $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 不同时为零;

(iv) $g(a)\neq g(b)$,

则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

证　作辅助函数

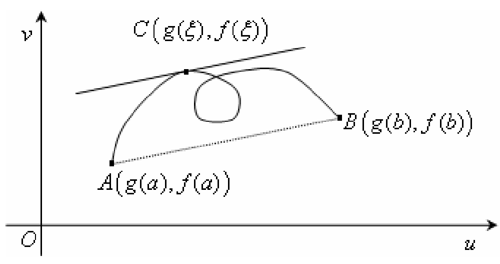
$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))\right].$$

易见 F 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理条件，故存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0.$$

因为 $g'(\xi)\neq 0$（否则由上式 $f'(\xi)$ 也为零），所以改写上式便得证.

【注 1】几何意义，$\begin{cases}u=g(x)\\ v=f(x)\end{cases}, a\le x\le b$，见下图.



【注 2】令 $g(x)=x$，则为 Lag 定理

【注 3】 若 $g'(x)\neq 0, x\in(a,b)$，则由 Darboux 定理的推论，$g(x)$ 严格单调，条件（iii）和（iv）都满足。

例 1（教材例 1）设函数 f 在 $[a,b](a>0)$ 上连续，在 (a,b) 上可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$$

证　把要证的结论变形为

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\dfrac{1}{\xi}}$$

取 $g(x)=\ln x$，对 f,g 用柯西中值定理便得证。

【例 2】（总练习题：3） 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $a\cdot b>0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

证　结论变形

$$\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{-\dfrac{f(\xi)-\xi f'(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}=\left.\frac{\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}\right|_{x=\xi}$$

对 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x},G(x)=\dfrac{1}{x}$ 用柯西中值定理便得证。

【二】 不定式极限

我们把两个无穷小量或两个无穷大量之比的极限统称为**不定式极限**，分别记为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的不定式极限．现在我们将以导数为工具研究不定式极限，这个方法通常称为**洛必达(L'Hospital)法则**．柯西中值定理则是建立洛必达法则的理论依据．

定理 2　($\dfrac{0}{0}$ 型不定式极限)　若函数 f 和 g 满足：

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$；

(ii) 在点 x_0 的某空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 上两者都可导，且 $g'(x)\neq 0$；

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 可为实数，也可为 $\pm\infty$ 或 ∞），

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

证　补充定义 $f(x_0)=g(x_0)=0$，使得 f 与 g 在点 x_0 处连续．任取 $x\in U^\circ(x_0)$，在区间$[x_0,x]$或$[x,x_0]$上应用柯西中值定理，有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\ x_0<\xi<x \text{ 或 } x<\xi<x_0$$

当 $x\to x_0$ 时, $\xi\to x_0$, 因此

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{u\to x_0}\frac{f'(u)}{g'(u)}=A.$$

【注】上面极限的理由完全同导数极限的证明(变量替换法)。

【定理 3】　（$\dfrac{\bullet}{\infty}$ **型不定式极限**）　若函数 f 和 g 满足：

（i）在 x_0 的某右邻域 $U_+^0(x_0)$ 上两者都可导，且 $g'(x)\neq 0$;

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=\infty$;

（iii）$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 可为实数，也可为 $\pm\infty,\infty$）

则

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

[证明略]

例 1 用洛必达法则证明下面等价无穷小

（1） $x\sim\sin x\sim e^x-1\sim\ln(1+x), x\to 0$

（2）$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2, x\to 0$

（3）$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x(\alpha\neq 0),x\to 0$

例 2（几个无穷大的比较）

$$(\ln x)^\beta(\beta>0)\ll x^\alpha(\alpha>0)\ll e^x,x\to+\infty$$

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x^{\alpha/\beta}}\right)^\beta$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha/\beta}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{(\alpha/\beta)x^{\alpha/\beta-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\alpha/\beta)x^{\alpha/\beta}}=0$$

（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{e^{x/\alpha}}\right)^\alpha$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x/\alpha}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(1/\alpha)e^{x/\alpha}}=0$$

例 3　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x\cos x}{x-\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+x\sin x}{1-\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x+x\cos x}{\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(2+\frac{x}{\sin x}\cos x\right)=2+1=3$$

例 4　$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{1-e^{\sqrt{x}}}\overset{t=\sqrt{x}}{=}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t}{1-e^t}=-1$

例 5　$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}\overset{0/0}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{\sin x+x\sin x}$

$$\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0$$

例 6　$\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x\ln x}=e^0=1$，其中 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x\overset{t=1/x}{=}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{-\ln t}{t}=0$

例 7　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\overset{1^\infty}{=}\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}}=e^{-6}$，其中

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}$$

$$\overset{\text{等价无穷小替换}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{6x^2}=-\frac{1}{6}$$

例 8　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}$

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\cos x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sin x}{1}$ 不存在，洛必达法则失效。但

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\cos}{x}\right)=1$$

例 9 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}\overset{\infty/\infty}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\overset{\infty/\infty}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ 循环，但

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1$$

例 10 （教材例 14）设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

且已知 $g(0)=g'(0)=0$，$g''(0)=3$，试求 $f'(0)$.

解 因为 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{g(x)}{x^2}$,

所以由洛必达法则得

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)}{2x}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}g''(0)=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

【思考】

(1)上例解法中，已知条件 $g(0)=0$ 用在何处?

(2)如果用两次洛必达法则，得到

$$f'(0)=\cdots=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{g''(x)}{2}=\frac{1}{2}g''(0)=\frac{3}{2}.$$

错在何处?

例 11 （教材例 15） 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2})^n$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x+x^2)-\ln x^2}{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2x+1}{1+x+x^2}-\dfrac{2}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{x^2+x+1}=1,$$

由归结原则

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=e$$

例 12 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)+f'(x)\big)=A.$ 证明：

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$$

证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x f(x)}{e^x}\overset{\frac{\cdot}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\big(f(x)+f'(x)\big)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)+f'(x)\big)=A$

§3　泰勒公式

多项式函数是各类函数中最简单的一种，用多项式逼近函数是近似计算和理论分析的一个重要内容．实际上人（计算机）只会做加减乘除运算，对于一个复杂的函数（如$\sin x, e^x$等）能否用只含加减乘除运算的函数（如多项式，有理分式等）近似，这是非常重要的。

【一】 带有佩亚诺型余项的泰勒公式

先看多项式的系数与其导数的关系。

设

$$p(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n.$$

$$p(x_0)=a_0 \Rightarrow a_0=p(x_0)=p^{(0)}(x_0)$$

$$p'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$p'(x_0)=a_1 \Rightarrow a_1=p'(x_0)=p^{(1)}(x_0)$$

类似地，$p^{(k)}(x_0)=k!a_k$

$$a_k=\frac{1}{k!}p^{(k)}(x_0),(k=0,1,2,\cdots,n) \qquad (1)$$

由此可见，多项式$p(x)$的各项系数由其在点x_0的各阶导数值所唯一确定．

对于一般函数f，设它在点x_0存在直到n阶的导数．系数按公式（1）构造下面多项式：

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad （2）$$

称多项式（2）为函数f在点x_0处的**泰勒(Taylor)多项式**，$T_n(x)$的各项系数

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(k=0,1,\cdots,n)$$

称为**泰勒系数**．

由（1）知 $f(x)$ 与 $T_n(x)$ 在点 x_0 有直到 n 阶导数值（有的书上叫有 n 阶接触），即

$$f^{(k)}(x_0)=T_n^{(k)}(x_0), k=0,1,2,\cdots,n. \tag{3}$$

下面讨论误差 $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$（称为**泰勒余项**）的大小。

定理 1 （**带有佩亚诺型余项的泰勒公式**）若函数 f 在点 x_0 存在直至 n 阶导数，则

$$R_n(x)=f(x)-T_n(x)=o((x-x_0)^n)$$

即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \tag{4}$$

证　记 $Q_n(x)=(x-x_0)^n$，现在只要证

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{Q_n(x)}=0.$$

由 $f^{(k)}(x_0)=T_n^{(k)}(x_0), k=0,1,2,\cdots,n.$ 知，

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\cdots R_n^{(n)}(x_0)=0$$

又易知，

$$Q_n(x_0)=Q_n'(x_0)=\cdots=Q_n^{(n-1)}(x_0)=0, Q_n^{(n)}(x_0)=n!$$

因为 $f^{(n)}(x_0)$ 存在，所以在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上 f 存在 $n-1$ 阶导函数 $f(x)$. 于是，接连使用洛必达法则 n—1 次，得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{Q_n'(x)}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{Q_n^{(n-1)}(x)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-\left[f^{(n-1)}(x_0)+f^{(n)}(x_0)(x-x_0)\right]}{n(n-1)\cdots 2(x-x_0)}$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)\right]=0$$

形如 $o((x-x_0)^n)$ 的余项称为**佩亚诺(Peano)型余项**.

【注 1】满足

$$f(x)=p_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right) \tag{5}$$

的多项式

$$p(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$$

不一定泰勒多项式。例如

$$f(x)=x^{n+1}D(x)$$

其中 $D(x)$ 狄利克雷函数。除 $f'(0)=0$ 外，f 不存在其他任何阶导数。但

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}xD(x)=0$$

即 $f(x)=o(x^n)$。若取

$$p_n(x)=0+0\cdot x+0\cdot x^2+\cdots+0\cdot x^n\equiv 0$$

则（5）式成立，但 $p_n(x)$ 不是 f 的泰勒多项式。

【注 2】满足（5）的多项式 $p_n(x)$ 是唯一的。

设 $f(x)=p_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right)=q_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right)$，其中

$$p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$$

$$q_n(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\cdots+b_n(x-x_0)^n$$

则

$$p_n(x)-q_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$$

即

$$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)(x-x_0)+(a_2-b_2)(x-x_0)^2+\cdots+(a_n-b_n)(x-x_0)^n=o\left((x-x_0)^n\right)$$

令 $x\to x_0$，得 $a_0=b_0$

$$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)(x-x_0)+\cdots+(a_n-b_n)(x-x_0)^{n-1}=o\left((x-x_0)^{n-1}\right)$$

再令 $x\to x_0$，得 $a_1=b_1$。同理，$a_2=b_2,\cdots,a_n=b_n$

注 2 说明：泰勒公式的唯一。

以后用得较多的是泰勒公式在 $x_0=0$ 时的特殊形式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n). \qquad (6)$$

它也称为**(带有佩亚诺余项的)麦克劳林**(Maclaurin)公式.

定理 2 常用的 Mac 公式:

(1) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$;

(2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m})$;

(3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x)^{2m+1}$;

(4) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$；

(5) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$;

(6) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$.

证　这里只验证其中两个公式，其余请读者自行证明.

（1） $f(x)=e^x, f^{(k)}(x)=e^x, f^{(k)}(0)=1$

（2） $f(x)=\sin x$， $f^{(k)}(x)=\sin(x+\frac{k\pi}{2})$，

$$f^{(2k)}(0)=0, f^{(2k-1)}(0)=(-1)^{k-1}, k=1,2,\cdots$$

（3） $f(x)=\cos x$， $f^{(k)}(x)=\cos(x+\frac{k\pi}{2})$，

$$f^{(2k)}(0)=(-1)^k, f^{(2k-1)}(0)=0, k=1,2,\cdots$$

（4） $f(x)=\ln(1+x), f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}, k=1,2,\cdots,n$

$$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$

（5） $f(x)=(1+x)^\alpha, f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$$

记 $C_\alpha^k=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$， $C_\alpha^0=1$，则

$$(1+x)^{\alpha}=C_{\alpha}^{0}+C_{\alpha}^{1}x+C_{\alpha}^{2}x^{2}+\cdots+C_{\alpha}^{n}x^{n}+o(x^{n})$$

（6）这是（5）的特例。

例 1（教材例 2）写出 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的麦克劳林公式，并求 $f^{(98)}(0)$ 与 $f^{(99)}(0)$.

解　用 $(-\frac{x^2}{2})$ 替换公式（1）中的 x，便得

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}+\cdots(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{2^n n!}+o(x^{2n}).$$

由 Taylor 公式的唯一性，上述公式就是 f 的 Mac 公式。x^{98} 与 x^{99} 的系数分别为

$$\frac{1}{98!}f^{(98)}(0)=(-1)^{49}\frac{1}{2^{49}\cdot 49!},\quad \frac{1}{99!}f^{(99)}(0)=0.$$

由此得到 $f^{(98)}(0)=-\dfrac{98!}{2^{49}\cdot 49!},\quad f^{(99)}(0)=0.$

例 2（教材例 3 求 $\ln x$ 在 $x=2$ 处的泰勒公式.

解　由于 $\ln x=\ln[2+(x-2)]=\ln 2+\ln(1+\dfrac{x-2}{2})$, 得

$$\ln x=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2\cdot 2^2}(x-2)^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}(x-1)^n+o((x-2)^n).$$

由 Taylor 公式的唯一性，上式就是所求的 Taylor 公式。

例 3（教材例 4）　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解　$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^5), e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{8}+o(x^5),$

$$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=-\frac{x^4}{12}+o(x^5).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^5)}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$

例 4　求 $\dfrac{1}{\cos x}$ 的 Mac 公式（至 x^4 项）

解

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)}$$

$$=1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^2+o(x^4)$$

$$=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{4}+o(x^4)=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)$$

例 5　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}$

解
$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3),\quad \sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

$$\tan\tan x=\tan\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)=\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)+\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)^3+o(x^3)$$

$$=x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$$

类似地

$$\sin\sin x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}=2$$

例 6　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)-6\left(\sqrt[3]{2-\cos x}-1\right)}{x^4}$

解
$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)$$

$$\ln(1+\sin^2 x)=\ln\left(1+\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)^2\right)=\ln\left(1+x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)\right)$$

$$=x^2-\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{3}x^4\right)^2+o(x^4)=x^2-\frac{5}{6}x^4+o(x^4)$$

$$\sqrt[3]{2-\cos x}=\left(1+(1-\cos x)\right)^{\frac{1}{3}}=\left(1+(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4))\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=1+\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)^2+o(x^4)=1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

$$\text{分子}=x^2-\frac{5}{6}x^4+o(x^4)\ -6\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)=-\frac{7}{12}+o(x^4)$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)-6\left(\sqrt[3]{2-\cos x}-1\right)}{x^4}=-\frac{7}{12}$$

【二】 带有拉格朗日型余项的泰勒公式

现在我们将泰勒公式构造一个**定量**形式的余项，以便于对误差进行估计。

定理 3 （**带有拉格朗日型余项的泰勒公式**）若函数 f 在 $[a,b]$ 上存在直至 n 阶的连续导函数，在 (a,b) 内存在 $(n+1)$ 阶导函数，则对任意给定的 $x,x_0\in[a,b]$，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

证　作辅助函数 $F(t)=f(x)-[f(t)+f'(t)(x-t)+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n]$,

$$G(t)=(x-t)^{n+1}.$$

所要证明的

$$F(x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}G(x_0)\text{ 或 }\frac{F(x_0)}{G(x_0)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

不妨设 $x_0<x$,则 $F(t)$ 与 $G(t)$ 在 $[x_0,x]$ 上连续,在 (x_0,x) 内可导,且

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n,\ G'(t)=-(n+1)(x-t)^n\neq 0.$$

又因 $F(x)=G(x)=0$，所以由柯西中值定理证得

$$\frac{F(x_0)}{G(x_0)}=\frac{F(x_0)-F(x)}{G(x_0)-G(x)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

其中 $\xi\in(x_0,x)\subset(a,b)$.

【注 1】　无论 $x_0<x$ 还是 $x_0>x$，ξ 可写成 $\xi=x_0+\theta(x-x_0)(0<\theta<1)$,

【注 2】　$n=0$ 时，即为拉格朗日中值公式

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0).$$

当 $x_0=0$ 时，得到泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}(0<\theta<1).$$

定理 4 常用的 Mac 公式：

（1）$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},0<\theta<1,x\in(-\infty,+\infty).$

（2）$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$

$$+(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1},0<\theta<1,x\in(-\infty,+\infty).$$

（3）$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\dfrac{x^{2m}}{(2m)!}$

$$+(-1)^{m+1}\frac{\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2},0<\theta<1,x\in(-\infty,+\infty).$$

（4）$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$

$$+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},0<\theta<1,x>-1\text{。}$$

（5）$(1+x)^\alpha=1+C_\alpha^1x+C_\alpha^2x^2+\cdots+C_\alpha^nx^n+C_\alpha^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1},\ 0<\theta<1,x>-1.$

（6）$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\dfrac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}},\ 0<\theta<1,|x|<1.$

例 7（教材例 6）证明数 e 为无理数.

证　由

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!}(0<\theta<1).$$

得

$$n!e-(n!+n!+3.4\cdots n+\cdots+n+1)=\frac{e^{\theta}}{n+1}.$$

倘若 $e=\dfrac{p}{q}$ (p,q 为正整数)，则当 $n>q$ 时,n!e 为正整数，从而上式左边为正整数．因为

$\dfrac{e^{\theta}}{n+1}<\dfrac{e}{n+1}<\dfrac{3}{n+1}$，所以 $n\geq 2$ 时右边为非整数,矛盾．从而 e 只能是无理数．

例 8（教材例 7）用泰勒多项式逼近正弦函数 $\sin x$，即

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

要求误差不超过 10^{-3}．试以 $m=1$ 和 $m=2$ 两种情形分别讨论 x 的取值范围．

（i）$m=1$ 时，$\sin x\approx x$，使其误差满足

$$|\sin x-x|=\left|\frac{\cos\theta x}{3!}x^3\right|\leq\frac{|x|^3}{6}<10^{-3}$$

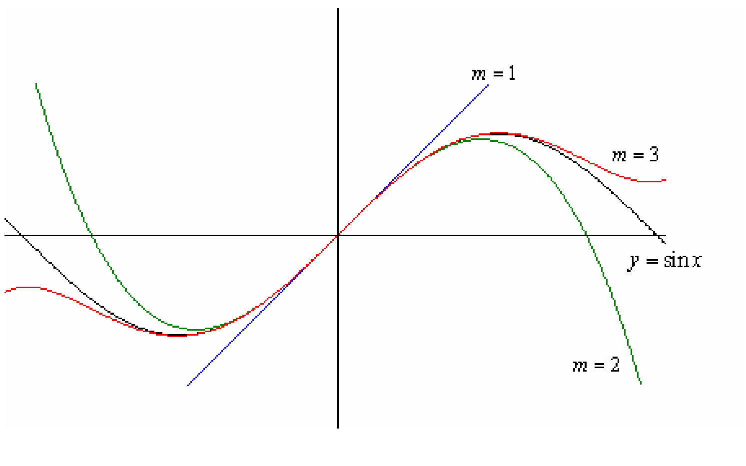
只需 $|x|<0.1817$ (弧度)，即大约在原点左右 $10^{\circ}24'40''$ 范围内．

（ii）$m=2$ 时，$\sin x\approx x-\dfrac{x^3}{6}$，使其误差满足：

$$\left|\sin x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\right|=\left|\frac{\cos\theta x}{5!}x^5\right|\leq\frac{|x|^5}{5!}<10^{-3}$$

只需 $|x|<0.6543$ (弧度)，即大约在原点左右 $37^{\circ}29'38''$ 范围内。

参见下图



例 9（**Jensen 不等式的特例**）设 f 在 (a,b) 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0,x\in(a,b)$。

则对任意 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a,b)$，有

$$f(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}) \le \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

证 记 $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$，则 $x_0 \in (a,b)$，$\forall x \in (a,b)$，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2 \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

从而

$$f(x_i) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x_i - x_0)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \ge nf(x_0) + f'(x_0)(\sum_{i=1}^{n} x_i - nx_0) = nf(x_0)$$

【例 10】（总练习题：12） 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f'(a) = f'(b) = 0$.证明存在一点 $\xi \in (a,b)$,使得

$$\left|f''(\xi)\right| \ge \frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b) - f(a)\right|$$

证 将函数 f 在点 a 和 b 分别展为带拉格朗日型余项的泰勒公式，并取 $x = \dfrac{a+b}{2}$，有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + f'(a)\left(\frac{a+b}{2} - a\right) + f''(\xi_1)\left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2, a < \xi_1 < \frac{a+b}{2}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + f'(b)\left(\frac{a+b}{2} - b\right) + f''(\xi_2)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2, \frac{a+b}{2} < \xi_2 < b$$

两式相减，并注意到 $f'(a) = f'(b) = 0$，得

$$\frac{4}{(b-a)^2}\left[f(b) - f(a)\right] = \frac{1}{2}\left[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)\right]$$

于是

$$\frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b) - f(a)\right| \le \frac{1}{2}\left(\left|f''(\xi_1)\right| + \left|f''(\xi_2)\right|\right) \le \left|f''(\xi)\right|$$

这里 $\xi = \begin{cases} \xi_1, & \left|f''(\xi_1)\right| \ge \left|f''(\xi_2)\right| \\ \xi_2, & \left|f''(\xi_1)\right| < \left|f''(\xi_2)\right| \end{cases}$

【注】如果火车从起点到终点，$s(0) = 0, s(T) = S$，则至少有一时刻的加速度的绝对

值不小于$\dfrac{4S}{T^2}$。

例 11（总练习题：19）设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的二阶可导函数，若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，则存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使 $f''(\xi)=0$。

证　反证。假设 $f''(x)\neq 0, x\in(-\infty,+\infty)$，由导数介值定理，有 $f''(x)>0$ 或 $f''(x)<0$。不妨设 $f''(x)>0$，则必存在 $x_0\in(-\infty,+\infty)$ 使 $f'(x_0)\neq 0$（否则 f 为常数）。由泰勒定理，

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

当 $f'(x_0)>0$ 时，令 $x\to+\infty$ 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

当 $f'(x_0)<0$ 时，令 $x\to-\infty$ 得 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

都与 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界性相矛盾。

§4　函数的极值与最大(小)值

【一】 极值判别

费马定理给出了取极值的必要条件，下面讨论充分条件。

定理 1 (极值的第一充分条件)　设 f 在点 x_0 连续，在某 $U^\circ(x_0;\delta)$ 上可导。

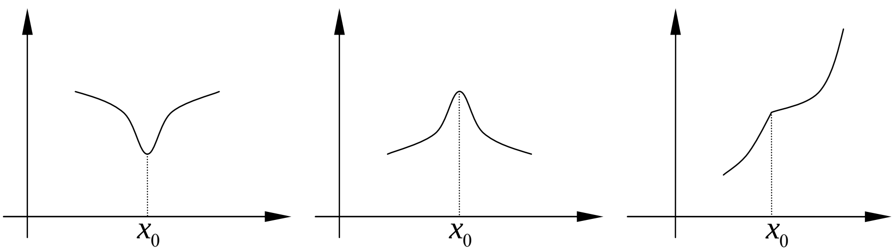
（i） 若当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)\le 0$，当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)\ge 0$，则 f 在点 x_0 取得极小值.

（ii）若当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)\ge 0$，当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)\le 0$，则 f 在点 x_0 取得极大值.

（iii）若当 $x\in U^\circ(x_0;\delta)$ 时，$f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$，则 f 在点 x_0 不取极值.

证　只证（ii）.

由条件，f 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内递增，在($x_0,x_0+\delta$)内递减，又由 f 在 x_0 处连续（见第 1 节引理），故对任意 $x\in U(x_0;\delta)$)，恒有　$f(x)\le f(x_0)$. 即 f 在 x_0 取得极大值.



定理 2 (极值的第二充分条件)　设 f 在 x_0 的某邻域 $U(x_0;\delta)$ 上一阶可导，在 $x=x_0$ 处二阶可导，且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\ne 0$.

（i）若 $f''(x_0)<0$，则 f 在 x_0 取得严格极大值.

（ii）若 $f''(x_0)>0$，则 f 在 x_0 取得严格极小值.

（iii）若 $f''(x_0)=0$，无法判别。

证　由条件，可得 f 在 x_0 处的二阶泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right).$$

由于 $f'(x_0)=0$, 因此

$$f'(x)-f(x_0)=\left[\frac{f''(x_0)}{2}+o(1)\right](x-x_0)^2.$$

这里 $\lim\limits_{x\to x_0}o(1)=0$，又因 $f''(x_0)\neq 0$, 故存在正数 $\delta'\leq\delta$，当 $x\in U^\circ(x_0;\delta')$ 时，

$$|o(1)|<\frac{1}{2}|f''(x_0)|$$

此时 $\frac{1}{2}f''(x_0)+o(1)$ 与 $\frac{1}{2}f''(x_0)$ 同号。所以，当 $f''(x_0)<0$ 时，对任意 $x\in U^\circ(x_0;\delta')$ 有

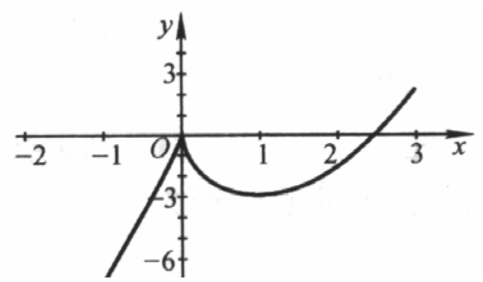
$$f(x)-f(x_0)<0,$$

即 f 在 x_0 取得严格极大值。同样对 $f''(x_0)>0$, 可得 f 在点 x_0 取得严格极小值。

若 $f''(x_0)=0$，则 f 在点 x_0 取极小、取极大和不取极值都有可能。如

$$f(x)=-x^4,x^4,x^3 \text{ 在 } x=0 \text{ 处分别取极大、极小和不取极值。}$$

例1（教材例 1）求 $f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值点与极值.



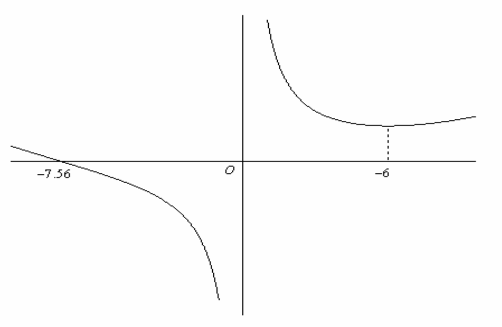
解　$f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}=2x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}$ 在 $(-\infty;+\infty)$ 上连续，且当 $x\neq 0$ 时，有

$$f'(x)=\frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{3}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$$

易见，$x=1$ 为 f 的稳定点，$x=0$ 为 f 的不可导点[注：可从定义验证，也可由导数极限定理，$f'_+(0)=-\infty, f'_-(0)=+\infty$]。

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	+	不存在	−	0	+
f	↑	0 极大	↓	−3 极小	↑

例 2（教材例 2）　求 $f(x)=x^2+\dfrac{432}{x}$ 的极值点与极值



解　当 $x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=2x-\frac{432}{x^2}=\frac{2x^3-432}{x^2}。$$

令 $f'(x)=0$, 求得稳定点 $x=6$, 又因　$f''(6)=(2+\dfrac{864}{x^3})_{x=6}=6>0$, 故 $x=6$ 为 f 的极小值点，极小值 $f(6)=108$.

对于应用二阶导数无法判别的问题，可借助更高阶的导数来判别.

定理 3 (极值的第三充分条件)　设 f 在 x_0 的某邻域内存在直到 $n-1$ 阶导函数，在 x_0 处 n 阶可导，且 $f^{(k)}(x_0)=0(k=1,2,\cdots,n-1)$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$，则

（i）当 n 为偶数时，f 在 x_0 取极值，$f^{(n)}(x_0)<0$ 取极大，$f^{(n)}(x_0)>0$ 取极小.

（ii）当 n 为奇数时，f 在 x_0 处不取极值.

证　$f'(x)-f(x_0)=\left[\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)\right](x-x_0)^n.$

当 n 为偶数时，证明同定理 2.

当 n 为奇数时，在 x_0 的附近 $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)$ 不变号，而 $(x-x_0)^n$ 变号，故不取极值。

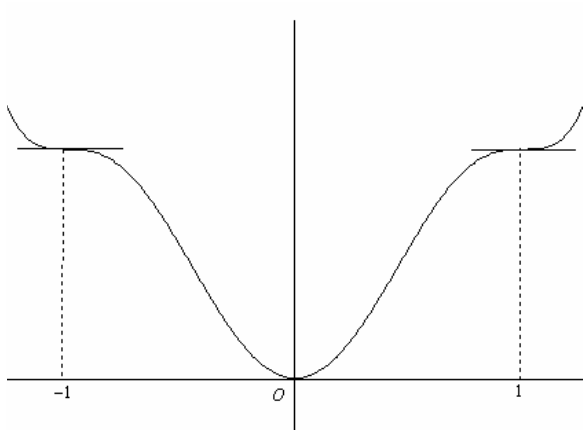
例 3　试求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解　由于 $f'(x)=6x(x^2-1)^2$, $f'(x)=0\Rightarrow x=-1,0,1$，

$f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$, $f'(0)=6>0$，极小，$f''(\pm 1)=0$

$f'''(x)=24x(5x^2-3)$, $f(\pm 1)\neq 0$，不取极值。

参见下图



【注】上述三个定理都是判定极值的充分条件，而非必要条件。例如

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处取极小值 $f=0$，但 $f^{(k)}(0)=0(k=1,2,\cdots)$。

【二】 最大值与最小值

若函数 f 在闭区间$[a,b]$上连续，则 f 在$[a,b]$上一定有最大、最小值．最值只可能是 $f(a),f(b)$，$f(x_i)$（x_i 为稳定点或不可导的点），比较它们的值的大小即可求出最值。

例 4（教材例 4）　求函数 $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|$ 在闭区间$\left[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}\right]$上的最大值与最小值

解　函数 f 在闭区间$\left[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}\right]$上连续，故必存在最大最小值．由于

$$f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|=\left|x\left(2x^2-9x+12\right)\right|$$

由于 $2x^2-9x+12=2\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0$，故

$$f(x)=\begin{cases} -x\left(2x^2-9x+12\right), -\frac{1}{4}\le x\le 0, \\ x\left(2x^2-9x+12\right), 0<x\le\frac{5}{2}, \end{cases}$$

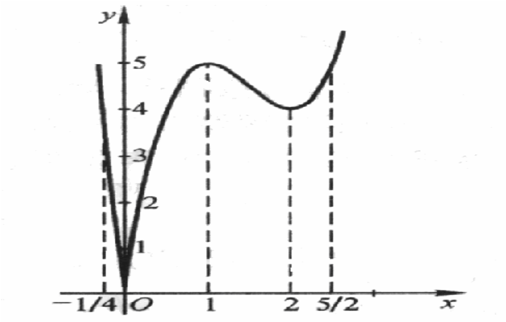
因此
$$f'(x)=\begin{cases}-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2),-\dfrac{1}{4}\le x<0,\\ 6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2),0<x\le\dfrac{5}{2}.\end{cases}$$

又因 $f'(0-0)=-12, f'(0+0)=12$，所以由导数极限定理推知函数在 $x=0$ 处不可导.

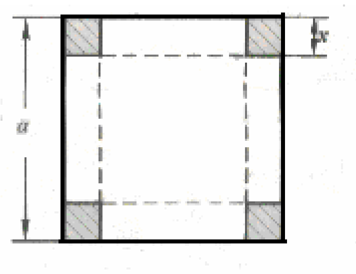
求出函数 f 在稳定点 $x=1,2$，不可导点 $x=0$，以及端点 $x=-\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{2}$ 的函数值

$$f(1)=5, f(2)=4, f(0)=0, f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{115}{32}, f\left(\frac{5}{2}\right)=5.$$

所以函数 f 在 $x=0$ 处取最小值 0，在 $x=1$ 和 $x=\dfrac{5}{2}$ 处取得最大值 5.



例 5 （教材例 6） 剪去正方形四角同样大小的正方形后制成一个无盖盒子，问剪去小方块的边长为何值时，可使盒子的容积最大.



解 设每个小方块边长为 x，则盒子的容积为 $V(x)=x(a-2x)^2, x\in[0,\dfrac{a}{2}]$. 令

$$V'(x)=12(x-\frac{a}{6})(x-\frac{a}{2})=0,$$

在 $\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$ 内解得稳定点 $x=\dfrac{a}{6}$，并由 $V''(\dfrac{a}{6})=-4a<0$ 知道 $V(\dfrac{a}{6})=\dfrac{2a^3}{27}$ 为极大值. 显然该极大值即为最大值。

例 6（习题 6. 4：5） （常用结论） 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，并且在 I 上仅有唯一的极值点 x_0。证明：若 x_0 是 f 的极大（小）值点，则 x_0 必是 f 在 I 上的最大（小）值点。

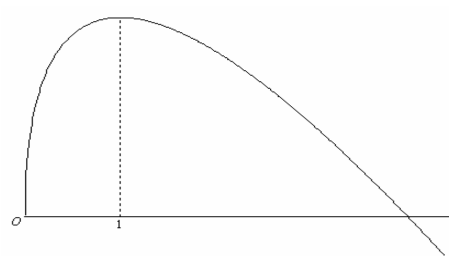
解　设x_0是f的极大值点。下面用反证法证明。

假设x_0不是f在I上的最大值点。于是存在$x_1 \in I$，使得$f(x_1) > f(x_0)$，不妨设$x_0 < x_1$。

f在闭区间$[x_0, x_1]$上连续，从而f在$[x_0, x_1]$上有最小值点x'。因为$f(x_1) > f(x_0) \geq f(x')$，所以$x' \neq x_1$；又因为$x_0$是$f$仅有唯一的极值点，且为极大值点，所以存在$\exists x'' \in (x_0, x_0+\delta) \subset [x_0, x_1]$使得$f(x_0) > f(x'') \geq f(x')$，所以$x' \neq x_0$。

这说明$x' \in (x_0, x_1)$是f的一个极小值点，与f仅有唯一的极值点相矛盾。

例 7　设$0 < \alpha < 1$。证明：当$x > 0$时，$x^{\alpha} - \alpha x \leq 1 - \alpha$。



证　$f(x) = x^{\alpha} - \alpha x$，$f'(x) = \alpha\left(x^{\alpha-1} - 1\right) = 0 \Rightarrow x = 1$，$f''(1) = \alpha\left(\alpha - 1\right) < 0$。故$f$仅有唯一的极值点$x = 1$，且为极大值点，由上题$x = 1$是最大值点。因此

$$f(x) = x^{\alpha} - \alpha x \leq f(1) = 1 - \alpha, x > 0$$

§5 函数的凸性与拐点

定义 设 f 为定义在区间 I 上的函数，若对 I 上的任意两点 x_1, x_2 和任意实数 $\lambda \in (0,1)$ 总有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \tag{1}$$

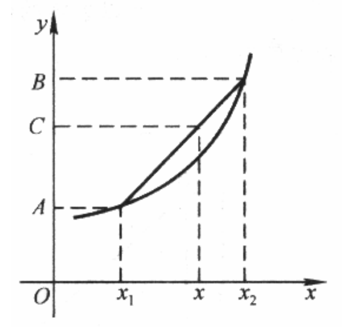
则称 f 为 I 上的**凸函数**．反之，如果总有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \tag{2}$$

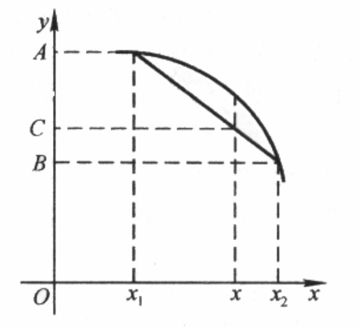
则称 f 为 I 的**凹函数**． 如果（1）与（2）的不等式改为严格不等式，则相应的函数称为**严格凸函数**和**严格凹函数**．

易证：若 $-f$ 为区间 I 上的凸函数，则 f 为区间 I 上的凹函数．故只需讨论凸性即可．

几何意义见下图



(a)凸函数



(b)凹函数

凸函数的几何特征是，曲线上任两点连弦，曲线总在弦的下面。

例 1 证明 $f(x)=|x|$ 是 $\mathbf{R}$ 上的凸函数.

证 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}, \forall 0<\lambda<1$，有

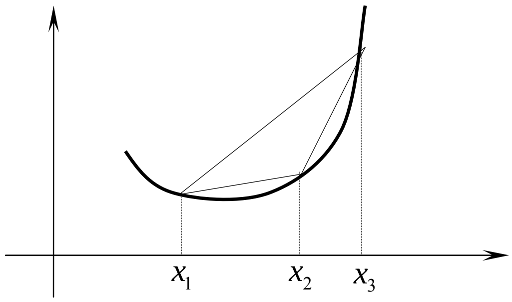
$$f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)=\left|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right| \le \lambda\left|x_1\right|+(1-\lambda)\left|x_2\right|=\lambda f(x_1)+(1-\lambda) f(x_2)$$

引理 f 为 I 上的凸函数的充要条件是：对于 I 上的任意三点 $x_1<x_2<x_3$，总有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

或

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$



[证明自学，此略]

定理 1　设 f 为区间 I 上的可导函数，则下述论断互相等价：

1°　f 为 I 上凸函数；

2°　f' 为 I 上的增函数；

3°　对 I 上的任意两点 x_1, x_2，有 $f(x_2) \ge f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$.

证（$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$）　任取 I 上两点 x_1, x_2（$x_1 < x_2$），当 $x_1 < x < x_2$ 时，由引理

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

令 $x \to x_1$，得 $f'(x_1) \le \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$，再令 $x \to x_2$，得 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2)$

因此 $f'(x_1) \le f'(x_2)$，即 f' 增。

（$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$）　$\forall x_1, x_2 \in I$，若 $x_1 < x_2$，则由拉格朗日中值定理和 f' 递增，有

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \ge f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

若 $x_1 > x_2$，则 $f'(\xi) \le f'(x_1), (x_2 - x_1) < 0$，仍有

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \ge f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

（$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$）　$\forall x_1, x_2 \in I$，取 $x_3 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \; (0 < \lambda < 1)$. 由 3°，并利用

$$x_1 - x_3 = (1-\lambda)(x_1 - x_2)，\quad x_2 - x_3 = \lambda(x_2 - x_1)$$

得

$$f(x_1)\geq f(x_3)+f'(x_3)(x_1-x_3)=f(x_3)+(1-\lambda)f'(x_3)(x_1-x_2)$$

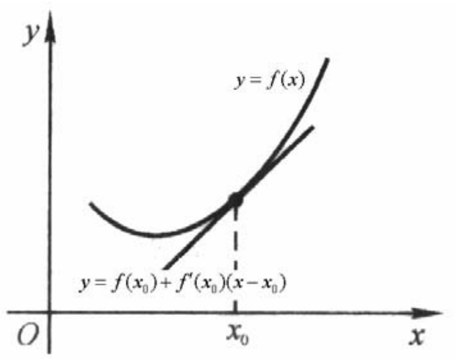
$$f(x_2)\geq f(x_3)+f'(x_3)(x_2-x_3)=f(x_3)+\lambda f'(x_3)(x_2-x_1).$$

分别用λ和$1-\lambda$乘上列两式并相加，便得

$$\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\geq f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2).$$

从而 f 为 I 上的凸函数.

【注】 论断3°几何意义：曲线$y=f(x)$总在它的任一切线之上．这是可导凸函数的几何特征.



定理 2　设 f 为区间 I 上的二阶可导函数，则在 I 上 f 为凸（凹）函数的充要条件是

$$f''(x)\geq 0(f''(x)\leq 0),x\in I.$$

证　f 凸$\Leftrightarrow f'$增$\Leftrightarrow f''(x)\geq 0$

【注】上面不等号改为严格不等号，则为严格凸（凹）

例 2　（教材例 1）讨论函数 $f(x)=\arctan x$ 的凸（凹）性区间。

解　$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2},f''(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$，

当$x\leq 0$时，$f''(x)\geq 0$；当$x\geq 0$时，$f''(x)\leq 0$.

从而在$(-\infty,0]$上 f 为凸函数，在$[0,+\infty)$上 f 为凹函数.

例 3　（教材例 2）若函数 f 为定义在开区间(a,b)上的可导的凸（凹）函数，则 $x_0\in(a,b)$ 为 f 的极小（大）值点的充要条件是 x_0 为 f 的稳定点，即 $f'(x_0)=0$.

证　下面只证明 f 为凸函数的情形.

必要性已由费马定理可出，现在证明充分性.

任取(a,b)内的一点$x(\neq x_0)$，它与x_0一起有

$$f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

因$f'(x_0)=0$，故$\forall x\in(a,b)$有$f(x)\geq f(x_0)$，即x_0为f的极小值点（且为最小值点）.

例 4（教材例 3）若函数f为开区间(a,b)上的凸函数，不恒为常数。证明：f不取最大值。

证　若不然，设$f(x_0)$是最大值。$\forall x_1,x_2\in(a,b),x_1<x_0<x_2$，如果$f(x_0)>f(x_1)$或$f(x_0)>f(x_2)$，由凸函数的定义，有

$$f(x_0)\leq\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)<(\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}+\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1})f(x_0)=f(x_0)$$

矛盾。只有$f(x_0)=f(x_1)=f(x_2)$。

例 4（教材例 3）（**延森(Jensen)不等式**）　若f为$[a,b]$上凸函数，则对任意$x_i\in[a,b]$，$\lambda_i>0$，$(i=1,2,\cdots,n)$，$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，有

$$f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).$$

证　应用数学归纳法．当$n=2$时，命题显然成立．设$n=k$时命题成立．即对任意$x_1,x_2,\cdots,x_k\in[a,b]$及$\alpha_i>0,i=1,2\cdots,k,\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1,$都有

$$f(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i)\leq\sum_{i=1}^{k}\alpha_i f(x_i).$$

现设$x_1,x_2,\cdots x_k,x_{k+1}\in[a,b]$及

$$\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,k+1),\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i=1$$

令$\alpha_i=\dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}},i=1,2,\cdots,k,$则$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$．由数学归纳法假设可推得

$$
\begin{aligned}
&f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_k x_k+\lambda_{k+1}x_{k+1})\\
&=f\left((1-\lambda_{k+1})\frac{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_k x_k}{1-\lambda_{k+1}}+\lambda_{k+1}x_{k+1}\right)\\
&\le(1-\lambda_{k+1})f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_k x_k)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})\\
&\le(1-\lambda_{k+1})[\alpha_1 f(x)+\alpha_2 f(x_2)+\cdots+\alpha_k f(x_k)]+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})\\
&=(1-\lambda_{k+1})\left[\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}}f(x_1)+\frac{\lambda_2}{1-\lambda_{k+1}}f(x_2)+\cdots+\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}}f(x_k)\right]+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})\\
&=\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i f(x_i).
\end{aligned}
$$

这就证明了对任何正整数$n(\ge 2)$，结论成立。

例 5　(教材例 8) 设 f 为开区间I 内的凸（凹）函数，证明 f 在I 内任一点x_0都存在左、右导数。

证　下面只证凸函数 f 在x_0存在右导数.

设$0<h_1<h_2$,则对$x_0<x_0+h_1<x_0+h_2$（这里取充分小的h_2，使$x_0+h_2\in I$),由引理

$$\frac{f(x_0+h_1)-f(x_0)}{h_1}\le\frac{f(x_0+h_2)-f(x_0)}{h_2}$$

令$F(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$,故由上式可见$F$ 为增函数，任取$x'\in I$ 且$x'<x_0$则对任何$h>0,$只要$x_0+h\in I,$也有

$$\frac{f(x_0)-f(x')}{x_0-x'}\le\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=F(h).$$

因而函数$F(h)$在$h>0$上有下界．故极限$\lim\limits_{h\to0^+}F(h)$存在，即 $f'_+(x_0)$存在。

推论　设 f 为开区间I 上的凸（凹）函数，则 f 在I 上连续。

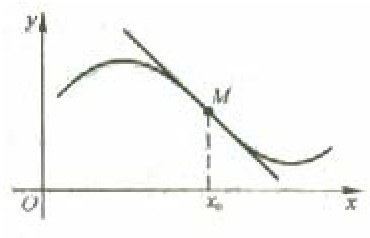
例 6　证明$\sin x>\dfrac{2}{\pi}x,x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，

证　$f(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x, f(0)=f(\dfrac{\pi}{2})$， $f''(x)=-\sin x<0, x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$

$f(x)$ 在严格凹， $f(x)>\min\left\{f(0), f(\dfrac{\pi}{2})\right\}=0$

定义　设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处有穿过曲线的切线．且在切点近旁，曲线在切线的两侧分别是严格凸和严格凹的，这时称点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的**拐点**.

由定义可见，拐点正是凸和凹曲线的分界点.



例如：$(0,0)$ 为 $y=\arctan x$ 的拐点．正弦曲线 $y=\sin x$ 有拐点 $(k\pi,0), k$ 为整数.

定理 3（拐点必要条件）若 f 在 x_0 二阶可导，则 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点的必要条件是 $f''(x_0)=0$.

证 设 f 在 $U_-^\circ(x_0)$ 上凸，在 $U_+^\circ(x_0)$ 上凹。则 f' 在 $U_-^\circ(x_0)$ 严格增，在 $U_+^\circ(x_0)$ 严格减。于是

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}\geq 0，\quad f''(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}\leq 0$$

从而 $f''(x_0)=0$ 。

【注】 $f''(x_0)=0$ 只是必要条件，如 $f(x)=x^4, f''(0)=0, (0,0)$ 不是拐点。

定理 4（拐点充分条件） 设 f 在 x_0 可导，在某邻域 $U^\circ(x_0)$ 上二阶可导．若在 $U_+^\circ(x_0)$ 和 $U_-^\circ(x_0)$ 上 $f''(x)$ 的符号相反，则 $\left(x_0, f(x_0)\right)$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

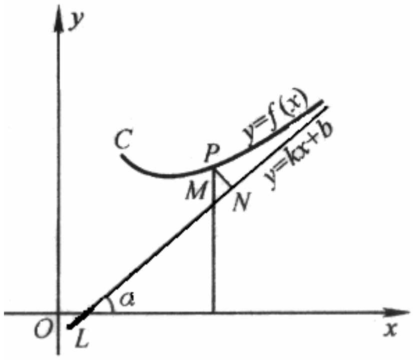
证　f 在 x_0 可导，则 f 在 $\left(x_0, f(x_0)\right)$ 有切线。设当 $x\in U_-^\circ(x_0)$ 时， $f''(x)<0$ ；当 $x\in U_+^\circ(x_0)$ 时， $f''(x)>0$ 。则 f 在 $U_-^\circ(x_0)$ 严格凹，曲线在切线下方， f 在 $U_+^\circ(x_0)$ 严格凸，曲线在切线上方。说明 $\left(x_0, f(x_0)\right)$ 是拐点。

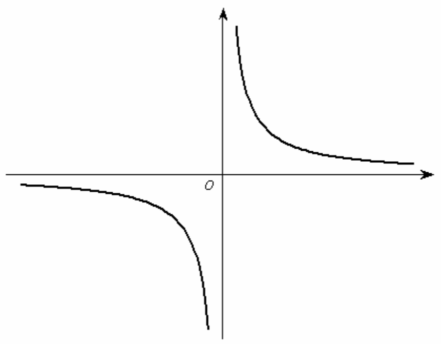
§6　函数图像的讨论

【一】 曲线的渐近线

[见教材第三章]

定义　若曲线 C 上的动点 P 沿着曲线无限地远离原点时，点 P 与某定直线 L 的距离趋于 0，则称直线 L 为曲线 C 的**渐近线**。





下面我们讨论曲线 $y=f(x)$ 在什么条件下存在**斜渐近线** $y=kx+b$ 与**垂直渐近线** $x=x_0$，以及怎样求出渐近线方程.

现假设曲线 $y=f(x)$ 有渐近线 $y=kx+b$.如图所示，曲线上动点 P 到渐近线的距离为

$$|PN|=|PM\cos\alpha|=\left|f(x)-(kx+b)\right|\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

按渐近线的定义，当 $x\to+\infty$ 时（$x\to-\infty, x\to\infty$ 与之似），$|PN|\to 0$ 既有

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$$

或

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=b \tag{1}$$

又由

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left[f(x)-kx\right]=0.b=0$$

得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k \tag{2}$$

由上面的讨论可知.若函数 $y = f(x)$ 有斜渐近线 $y = kx + b$，常数 k 与 b 可相继由（2）式和（1）式来确定；反之，若由（2），（1）两式求得 k 与 b，则可知 $|PN| \to 0 \ (x \to +\infty)$ 从而 $y = kx + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线.

若函数满足

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \text{（或} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty\text{，} \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty\text{）}.$$

则按渐近线的定义可知，曲线 $y = f(x)$ 有垂直于 x 轴的渐近线 $x = x_0$，称为**垂直渐近线.**

【二】 作函数图像的一般程序

1．求函数的定义域；

2．考察函数的奇偶性、周期性；

3．求函数的某些特殊点，如与两个坐标轴的交点，不连续点

4．确定函数的单调区间，极值点，凸性区间以及拐点；

5．考察渐近线；

6．综合以上讨论结果画出函数图像.

下面举例说明如何按照上述程序作出函数的图像.

例 1 （教材例）讨论函数 $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x - 1}$ 的性态，并作出其图像。

解　由于

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x - 1} = \sqrt[3]{(x-1)^2} \cdot \sqrt[3]{x+1},$$

可见此曲线与坐标轴交于 $(1,0), (-1,0), (0,0)$ 三点。

求出导数：

$$f'(x) = \frac{x + \dfrac{1}{3}}{\sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}},$$

由此得到稳定点 $x = -\dfrac{1}{3}$，不可导点 $x = \pm 1$．但因函数在 $x = \pm 1$ 处连续，$y'|_{x=\pm 1} = \infty$，所以在 $x = \pm 1$ 处有垂直切线.

再求二阶导数：

$$f''(x)=-\frac{8}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^5}}.$$

列表：

x	$(-\infty,1)$	-1	$\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	∞	+	0	−	∞	+
$f''(x)$	+	不存在	−	−	−	不存在	−
$f(x)$	凸增	拐点 $(-1,0)$	凹增	极大值 $\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$	凹减	极小值 0	凹增

求渐近线

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2-x-1}}{x}=1$$

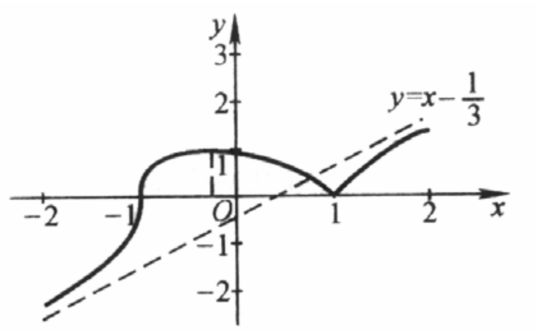
$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2-x-1}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3-x^2-x-1)-x^3}{(x^3-x^2-x-1)^{2/3}+x(x^3-x^2-x-1)^{1/3}+x^2}=-\frac{1}{3}$$

因此，有斜渐近线

$$y=x-\frac{1}{3}$$

画草图如下：



例 2 （**正态分布**）讨论函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的性态，并作图。

解　定义域：$(-\infty,+\infty)$，偶函数。求一阶导数：

$$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

稳定点只有 $x=0$ 。求二阶导数：

$$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$f''(x)=0 \Rightarrow x=\pm 1$ 。

渐近线： $y=0$

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	极大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	凹减	拐点 $(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$	凸减