数学分析　第二章
数列极限

§2 收敛数列的性质

本节首先考察收敛数列这个新概念有哪些优良性质,然后学习怎样运用这些性质.

第三讲

数列的性质 1

定理2.2(唯一性)

若 $\{a_n\}$ 收敛，则它只有一个极限.

证 设 a 是 $\{a_n\}$ 的一个极限.下面证明对于任何定数 $b \neq a$，b 不能是 $\{a_n\}$ 的极限.

若 a，b 都是 $\{a_n\}$ 的极限，则对于任何正数 $\varepsilon>0$，

$\exists N_1$，当 $n>N_1$ 时，有

$$|a_n - a| < \varepsilon; \quad (1)$$

$\exists N_2$，当 $n>N_2$ 时，有

$$|a_n - b| < \varepsilon. \tag{2}$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时 (1), (2)同时成立,

从而有

$$|a - b| \le |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon.$$

因 ε 是任意的, 所以 $a = b$.

$$|a_n - a| < \varepsilon; \tag{1}$$

定理2.3（有界性）

若数列 $\{a_n\}$ 收敛，且是有界数列.
即存在 $M>0$，使得 $|a_n|\le M$，$n=1,2,\cdots$.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，对于正数 $\varepsilon=1$，$\exists N, n>N$时，有

$$|a_n - a|<1,\ \text{即}\ a-1<a_n<a+1.$$

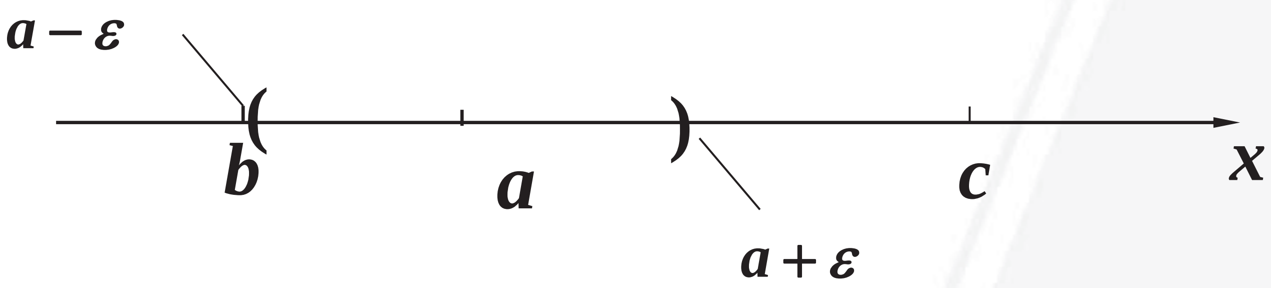
若令 $M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|a-1|,|a+1|\}$，

则对一切正整数 n，都有 $|a_n|\le M$.

注 数列$\{(-1)^n\}$是有界的，但却不收敛. 这就说明有界只是数列收敛的必要条件，而不是充分条件.

定理2.4（保号性）

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，对于任意两个实数 b, c，$b < a < c$，存在 N，当 $n > N$ 时，$b < a_n < c$.



证 取 $\varepsilon = \min\{a-b, c-a\} > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，

$$b \le a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon \le c, \text{ 即 } b < a_n < c.$$

注　若 $a > 0$ (或$a < 0$)，我们可取 $b = \frac{a}{2}$ (或 $c = \frac{a}{2}$)，

则 $a_n > \frac{a}{2} > 0$ (或 $a_n < \frac{a}{2} < 0$).

这也是称该定理为保号性定理的原因.

例1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

证 对任意正数 ε，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1/\varepsilon)^n}{n!}=0$，所以由定理 2.4，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，

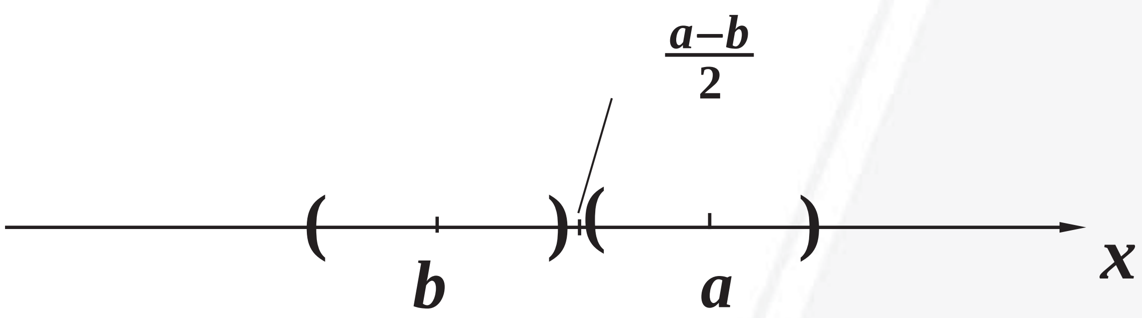
$$\frac{(1/\varepsilon)^n}{n!}<1,\ \text{即}\ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

定理2.5（保不等式）

设$\{a_n\}$, $\{b_n\}$均为收敛数列，如果存在正数N_0，当$n > N_0$时，有$a_n \le b_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

证 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. 若$b < a$,



取$\varepsilon=\dfrac{a-b}{2}$，由保号性定理,存在 $N>N_0$,当 $n>N$ 时,

$$a_n>a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2},\quad b_n<b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2},$$

故 $a_n>b_n$，导致矛盾．　所以 $a\le b$．

注　若将定理 2.5 中的条件 $a_n\le b_n$ 改为 $a_n<b_n$，也只能得到 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le\lim\limits_{n\to\infty}b_n$．这就是说，即使条件是严格不等式，结论却不一定是严格不等式．

例如，　虽然 $\dfrac{1}{n}<\dfrac{2}{n}$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=0$．

定理2.6（迫敛性）

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都以 a 为极限，数列 $\{c_n\}$ 满足：存在 N_0，当 $n > N_0$ 时，有 $a_n \le c_n \le b_n$，则

$\{c_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

证 对任意正数 ε，因为 $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$，所以分别存在 N_1, N_2，使得当 $n > N_1$ 时，$a - \varepsilon < a_n$；

当 $n > N_2$ 时，$b_n < a + \varepsilon$. 取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$，

当 $n > N$ 时，$a - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < a + \varepsilon$.

这就证得：$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$. 当 $n > N_2$ 时，

例2 求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的极限.

解 设$h_n=\sqrt[n]{n}-1\geq 0$, 则有

$$n=(1+h_n)^n\geq \frac{n(n-1)}{2}h_n^2\quad (n\geq 2),$$

故 $1\leq \sqrt[n]{n}=1+h_n\leq 1+\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$. 又因

$$\lim_{n\to\infty}1=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)=1,$$

所以由迫敛性, 得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.