数学分析 第五章
导数和微分

§5 微分

若在有限增量公式

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

中删去高阶无穷小量项,则得Δy 关于Δx 的一个线性近似式,这就是“微分”;其中的线性因子$f'(x_0)$ 即为导数.所以,微分和导数是一对相辅相成的概念.

*点击以上标题可直接前往对应内容

第十二讲

微分的概念及运算法则

微分的概念

微分从本质上讲是函数增量中关于自变量增量的线性部分. 先从有限增量公式看看函数增量的构成.

设函数 $y=f(x)$可导, 则有有限增量公式

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

公式说明，在函数$y=f(x)$可导的条件下，当Δx很小时, Δy与 $f'(x_0)\Delta x$ 只相差一个比 Δx 高阶的无穷小量. 或者说当Δx 很小时, Δy可以用Δx 的线性部分(主要部分) $f'(x_0)\Delta x$ 来近似地代替.

这蕴含着一个非常重要的思想—微分的思想.

定义1

设函数 $y = f(x)$在 $U(x_0)$ 上有定义. 如果函数的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可以表示成

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \qquad (1)$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数, 则称函数 f 在 x_0 可微, 并称 $A\Delta x$为 f 在 x_0 处的微分, 记作

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0} = A\Delta x, \quad 或\ \mathrm{d}f(x)\Big|_{x=x_0} = A\Delta x. \qquad (2)$$

由定义, 在x_0处函数的微分与增量只相差一个关于Δx的高阶无穷小量, 而 $\mathrm{d}y$是Δx的线性函数. 通俗地讲, $\mathrm{d}y$ 是 Δy 的线性近似. 可导与可微之间有如下关系.

定理5.9

函数 f 在点 x_0 可微的充要条件是 f 在点 x_0 可导,且

$$\mathrm{d} f(x)\big|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x .$$

证 (必要性) 如果 f 在点 x_0 可微，据 (1) 式有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + o(1).$$

$$\boxed{\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (1)}$$

于是 $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (A + o(1)) = A$,

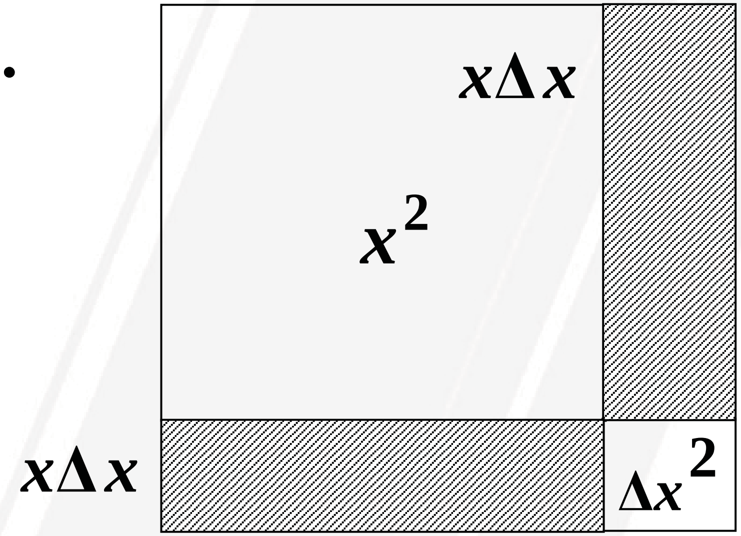
即 f 在点 x_0 可导，且 $f'(x_0) = A$.

充分性就是定义前的那段说明, 请大家课后整理完成.

微分的实例. 设一边长为 x 的正方形, 它的面积 $S=x^2$ 是 x 的函数. 如果给边长 x 一个增量 Δx, 正方形面积的增量 $\Delta S=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$ 由两部分组成 : Δx 的线性部分 $2x\Delta x$ 和 Δx 的高阶部分 $(\Delta x)^2$.

因此, 当边长 x 增加一个微小量 Δx 时, ΔS 可用 Δx 线性部分(微分) $2x\Delta x$ 来近似.

由此产生的误差是一个关于 Δx 的高阶无穷小量 $(\Delta x)^2$.



结论：去掉相对复杂的平方，可简化计算、方便研究.

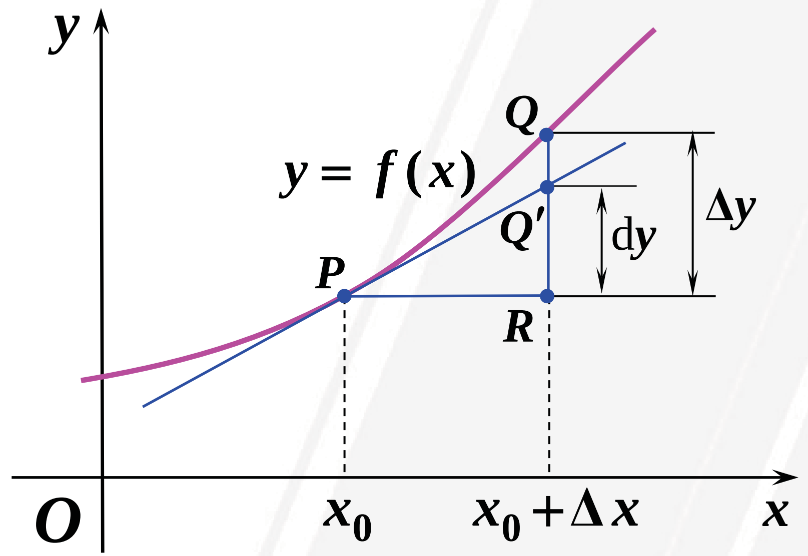
微分概念的几何解释：

f 在点 x_0 的增量为

$$\Delta y = RQ,$$

微分 $\mathrm{d}y = RQ'$ 是点 P 处

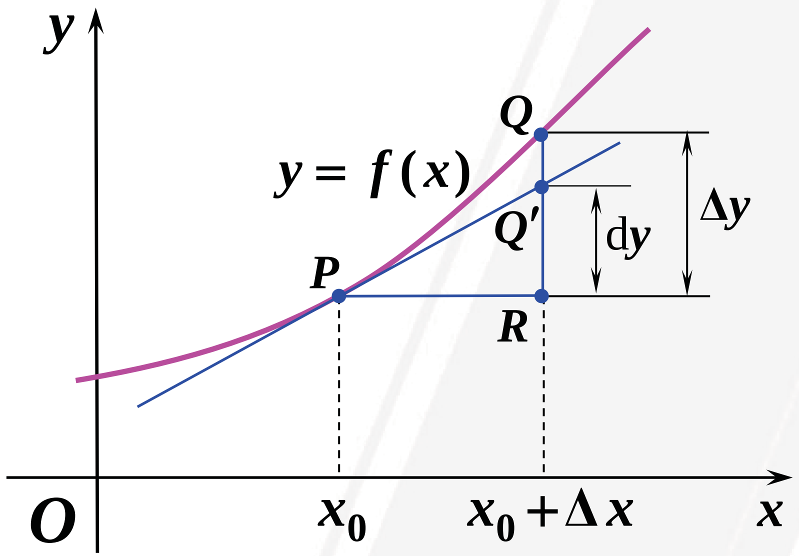
切线相应于 Δx 的增量.



当 $|\Delta x|$ 很小时，两者之差 $|\Delta y - \mathrm{d}y| = Q'Q$ 相比于 $|\Delta x|$ 将是更小的量（高阶无穷小）. 当 $f'(x_0) \neq 0$ 时，

$$\boxed{\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x}$$

从 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left|\dfrac{\Delta y - \mathrm{d}y}{\Delta x}\right| = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{Q'Q}{RQ'}\left|f'(x_0)\right| = 0,$



可得到

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{Q'Q}{RQ'} = 0.$$

这说明当$\Delta x \to 0$时，

$Q'Q$ 还是 RQ' 的高阶无穷小量.

若函数 f 在区间 I 上每一点都可微, 则称 f 是 I 上的可微函数. $f(x)$ 在 I 上的微分记为

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x, \quad x \in I, \tag{3}$$

它既依赖于Δx, 也与 x 有关.

习惯上喜欢把 Δx 写成 $\mathrm{d}x$，于是 (3) 式可改写成

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x,\ x \in I. \tag{4}$$

这相当于 $y = x$ 的情形，此时显然有 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x = \Delta x$.

(4) 式的写法会带来不少好处，首先可以把导数看成函数的微分与自变量的微分之商，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x), \tag{5}$$

所以导数也称为微商.

这个记号的更多好处将体现在后面积分学部分中.

例1 $\mathrm{d}(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}(a^{x}) = a^{x}\ln a\,\mathrm{d}x$.

微分的运算法则

由导数与微分的关系, 可方便得出微分运算法则:

1. $\mathrm{d}(u(x) \pm v(x)) = \mathrm{d}u(x) \pm \mathrm{d}v(x)$;

2. $\mathrm{d}(u(x)v(x)) = v(x)\mathrm{d}u(x) + u(x)\mathrm{d}v(x)$;

3. $\mathrm{d}\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right) = \dfrac{v(x)\mathrm{d}u(x) - u(x)\mathrm{d}v(x)}{v^2(x)}$;

4. $\mathrm{d}(f \circ g(x)) = f'(u)g'(x)\mathrm{d}x$, 其中 $u = g(x)$.

由于 $\mathrm{d}u = g'(x)\mathrm{d}x$, 故运算法则 4 又可以写成

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u.$$

这个性质称为 “一阶微分形式不变性”.

例2 求 $y = x^2 \ln x + \cos x^2$ 的微分.

解

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= \mathrm{d}(x^2 \ln x + \cos x^2) = \mathrm{d}(x^2 \ln x) + \mathrm{d}(\cos x^2) \\ &= \ln x \, \mathrm{d}(x^2) + x^2 \mathrm{d}(\ln x) - \sin x^2 \mathrm{d}(x^2) \\ &= 2x \ln x \, \mathrm{d}x + x \, \mathrm{d}x - 2x \sin x^2 \, \mathrm{d}x \\ &= x(2\ln x + 1 - 2\sin x^2)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

这里在 $\mathrm{d}(\cos x^2) = -\sin x^2 \mathrm{d}(x^2) = -2x \sin x^2 \mathrm{d}x$

的计算中，用了一阶微分形式不变性.

例3 求 $y=\mathrm{e}^{x^3+2x+1}$ 的微分.

解 $$\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{x^3+2x+1}\mathrm{d}(x^3+2x+1)$$

$$=(3x^2+2)\mathrm{e}^{x^3+2x+1}\mathrm{d}x.$$