Ch7 常微分方程数值解法

§1 引言

§2 欧拉方法

§3 龙格库塔法

§4 一阶方程组与高阶方程初值问题

§5 收敛性与稳定性

常微分方程数值解法

□ 必要性

在工程和科学技术的实际问题中，常需要求解微分方程。只有简单的和典型的微分方程可以求出解析解，而在实际问题中的微分方程往往无法求出解析解。

如微分方程初值问题$\begin{cases} y' = 1 - 2xy \\ y(0) = 0 \end{cases}$，其解析解(精确解)为：

$$y(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$$

但$y(1)$、$y(1.5)$等值却无法直接计算。

什么叫微分方程数值解

就是求微分方程解函数$y(x)$在区间$[a,b]$上的一系列离散点x_k：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

上函数值$y(x_k)$的近似值$y_k\,(k=1,\cdots,n)$，称y_k为问题的数值解。

哪些微分方程的数值解？

✓ $$\begin{cases} y' = f(x,y) & a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases} \text{——一阶方程初值问题}$$

✓ $$\begin{cases} y'' = f(x,y,y') & a \le x \le b \\ y(a) = y_0\ ,\ y'(a) = \alpha \end{cases} \text{——高阶方程初值问题}$$

✓ $$\begin{cases} y_1' = f_1(x,y_1,y_2) & y_1(x_0) = y_1 \\ y_2' = f_2(x,y_1,y_2) & y_2(x_0) = y_2 \end{cases} \text{——方程组初值问题}$$

微分方程"解析解"存在的条件

定理 若 $f(x,y)$ 在 $G=\{(x,y)\,|\,x\in[a,b],y\in(-\infty,+\infty)\}$

连续，并且关于 *y* 满足 **Lipschitz** 条件，即存在常数

L 使对于 $\forall x\in[a,b]$, $\forall y_1,y_2\in R$ 都有

L为Lip一常数

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$$

则问题(1)有唯一解 $y=y(x)$ 且 $y(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微，且连续依赖与初值。

初值有微小的变化而引起解的变化也是微小的，即问题是良态的。

本章总假设(1)满足定理中的条件。

§1 欧拉方法

一 问题

已知初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}, \quad h = \frac{b-a}{N},$$

求其解函数$y = y(x)$在等距节点$x_n = a + nh(n = 0,\cdots,N)$上的近似值 y_k?

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

二 方法

1. Euler方法 显式公式

将初值问题的解函数$y = y(x)$在x_n点Tarloy展开，有：

$$y(x) = y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n) + \frac{y''(\xi)}{2!}(x - x_n)^2$$

而$y' = f(x,y)$，所以 $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$，代入上式：

$$y(x) = y(x_n) + f(x_n, y(x_n))(x - x_n) + \frac{y''(\xi)}{2!}(x - x_n)^2$$

令$x = x_{n+1}$：

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + f(x_n, y(x_n))(x_{n+1} - x_n) + \frac{y''(\xi_n)}{2!}(x_{n+1} - x_n)^2$$

$$= y(x_n) + f(x_n, y(x_n))h + \frac{y''(\xi_n)}{2!}h^2,$$ 其中$\xi_n \in (x_n, x_{n+1})$

截去$T_1 = \frac{y''(\xi_n)}{2!}h^2$，得$y(x_{n+1})$的近似值$y_{n+1}$满足：

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad \text{-- Euler公式}$$

例1 用Euler公式求解初值问题 $\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ （$h = 0.1$）

解 由题意知：

$$f(x, y) = y - \frac{2x}{y}, x_0 = a = 0, n = 10, b = 1, y_0 = 1$$

根据Euler公式：

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(y_n - \frac{2x_n}{y_n})\ (n = 1, 2, \cdots, 10)$$

带入数据：

$$y_1 = y_0 + h(y_0 - \frac{2x_0}{y_0}) = 1 + 0.1(1 - \frac{2 \times 0}{1}) = 1.1$$

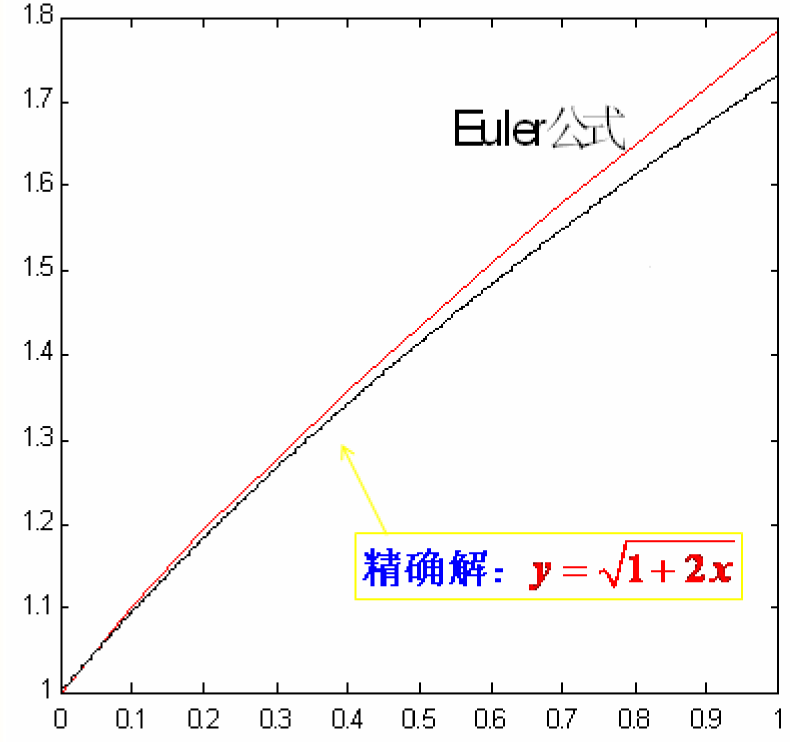
$$y_2 = y_1 + h(y_1 - \frac{2x_1}{y_1}) = 1.1 + 0.1(1.1 - \frac{2 \times 0.1}{1.1}) = 1.1918$$

依次类推 ...

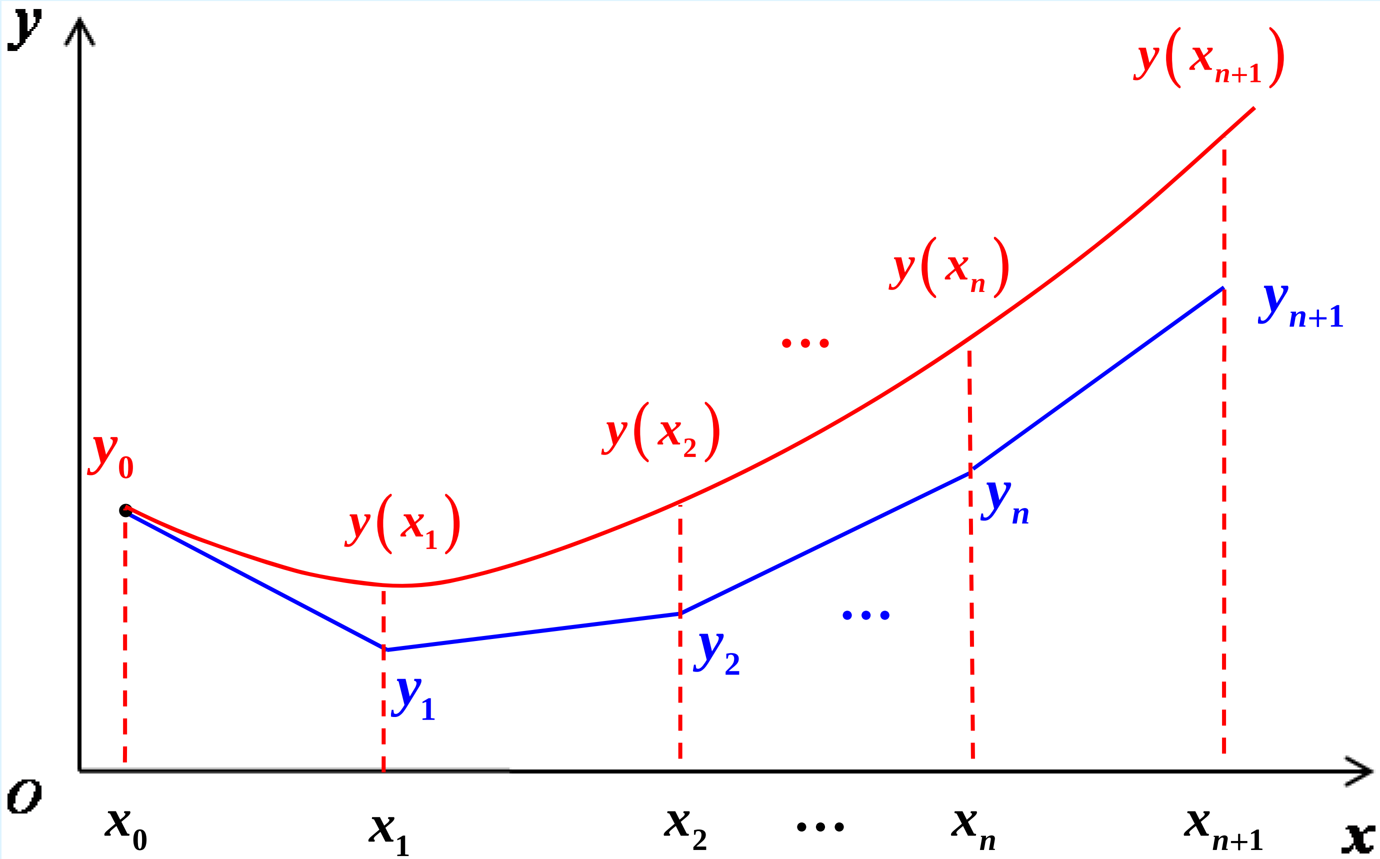
注 方程的精确解：$y = \sqrt{1 + 2x}$

例1(续) $\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ （$h = 0.1$）

n	x_n	数值解 y_n	精确解 $y(x_n)$
0	0.0	1.0000	1.0000
1	0.1	1.1000	1.0954
2	0.2	1.1918	1.1832
3	0.3	1.2774	1.2649
4	0.4	1.3582	1.3416
5	0.5	1.4351	1.4142
6	0.6	1.5090	1.4832
7	0.7	1.5803	1.5492
8	0.8	1.6498	1.6125
9	0.9	1.7178	1.6733
10	1.0	1.7848	1.7321



Euler方法的几何意义



2.后退的Euler方法 隐式公式

将$y=y(x)$在x_{n+1}点Tarloy展开：

$$y(x)=y(x_{n+1})+y'(x_{n+1})(x-x_{n+1})+\frac{y''(\xi)}{2!}(x-x_{n+1})^2$$

$$=y(x_{n+1})+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))(x-x_{n+1})+\frac{y''(\xi)}{2!}(x-x_{n+1})^2$$

令$x=x_n$：

$$y(x_n)=y(x_{n+1})+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))(x_n-x_{n+1})+\frac{y''(\xi_n')}{2!}(x_n-x_{n+1})^2$$

$$=y(x_{n+1})-hf(x_{n+1},y(x_{n+1}))+\frac{y''(\xi_n')}{2!}h^2,\quad \text{其中}\xi_n'\in(x_n,x_{n+1})$$

即： $$y(x_{n+1})=y(x_n)+hf(x_{n+1},y(x_{n+1}))-\frac{y''(\xi_n')}{2!}h^2$$

截去$T_2=-\frac{y''(\xi_n')}{2!}h^2$， 得$y(x_n)$的近似值$y_n$满足：

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1}) \quad \text{--后退Euler公式}$$

3.梯形公式 隐式公式

$$\because\ y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{y''(\xi_n)}{2!}h^2$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_{n+1}, y(x_{n+1})) - \frac{y''(\xi_n')}{2!}h^2$$

注意要：$T_1 = \frac{y''(\xi_n)}{2!}h^2$和$T_2 = -\frac{y''(\xi_n')}{2!}h^2$的"符号"相反

所以，两式相加并截去"T_1+T_2"得：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right] \quad \text{--梯形公式}$$

4.改进的Euler公式

梯形公式为隐式公式，求解时往往需要求解非线性方程，实际计算中通常由Euler公式对y_{n+1}进行"预测"，利用梯形公式进行"校正"

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] \end{cases}$$

--改进的Euler公式

将其改写为

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = f(x_k, y_k) \\ K_2 = f(x_{k+1}, y_k + hK_1) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

例2 求解初值问题 $\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ （$h = 0.1$）

解 $f(x, y) = y - \dfrac{2x}{y}$

Euler公式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h\left(y_n - \frac{2x_n}{y_n}\right)$$

改进Euler公式

$$f(x_n, y_n) = y_n - \frac{2x_n}{y_n} \triangleq K_1$$

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + hK_1$$

$$f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) = \bar{y}_{n+1} - \frac{2x_{n+1}}{\bar{y}_{n+1}} = \left(y_n + hK_1\right) - \frac{2x_{n+1}}{\left(y_n + hK_1\right)} \triangleq K_2$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$$

三 局部截断误差和方法的阶数

□ 局部截断误差

将方程精确解$y(x)$代入数值求解公式左右两端，左右两端之差$T=y(x_{n+1})-y_{n+1}$为方法的局部截断误差。

□ 方法的精度

若$T=O(h^{p+1})$，则称此方法具有p阶精度或称方法是p阶的。

□ Euler公式的局部截断误差与精度

1. Euler公式：

$y(x_{n+1})$：解函数$y(x)$在x_{n+1}点处的精确值；

y_{n+1}：假设第n步没有误差的条件下，代入数值公式后得到的$y(x_{n+1})$的近似值。

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$\because T_1 = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$$

$$= y(x_{n+1}) - \left[y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))\right]$$

$$= y(x_n) + y'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{y''(x_n)}{2!}(x_{n+1} - x_n)^2 + \cdots - \left[y(x_n) + hy'(x_n)\right]$$

$$= y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!}h^2 + \cdots - \left[y(x_n) + hy'(x_n)\right]$$

$$= \frac{y''(x_n)}{2!}h^2 + \cdots$$

$$= O(h^2)$$

$\therefore$ 局部截断误差首项为：$\dfrac{y''(x_n)}{2!}h^2 = O(h^2)$

方法具有"一阶"精度。

2. 后退的Euler公式： $y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$

$$\because T_2=y(x_{n+1})-y_{n+1}$$

$$=y(x_{n+1})-\left[y(x_n)+hf(x_{n+1},y(x_{n+1}))\right]$$

$$=y(x_n)+y'(x_n)(x_{n+1}-x_n)+\frac{y''(x_n)}{2!}(x_{n+1}-x_n)^2+\cdots-\left[y(x_n)+hy'(x_{n+1})\right]$$

$$=y(x_n)+y'(x_n)h+\frac{y''(x_n)}{2!}h^2+\cdots$$
$$-\left[y(x_n)+h\left(y'(x_n)+y''(x_n)h+\frac{y'''(x_n)}{2!}h^2+\cdots\right)\right]$$

$$=-\frac{y''(x_n)}{2!}h^2+\cdots$$

$$=O(h^2)$$

$\therefore$ 局部截断误差首项为：$-\dfrac{y''(x_n)}{2!}h^2=O(h^2)$

方法具有"一阶"精度。

3.梯形公式： $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})\right]$

$$\because T=y(x_{n+1})-y_{n+1}$$

$$=y(x_{n+1})-\left[y(x_n)+\frac{h}{2}\left(f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))\right)\right]$$

$$=y(x_{n+1})-\left[y(x_n)+\frac{h}{2}\left(y'(x_n)+y'(x_{n+1})\right)\right]$$

$$=y(x_n)+y'(x_n)h+\frac{y''(x_n)}{2!}h^2+\frac{y'''(x_n)}{3!}h^2+\cdots$$

$$-\left[y(x_n)+\frac{h}{2}\left(y'(x_n)+y'(x_n)+y''(x_n)h+\frac{y'''(x_n)}{2!}h^2+\cdots\right)\right]$$

$$=-\frac{y'''(x_n)}{12}h^3+\cdots=O(h^3)$$

$\therefore$ 局部截断误差首项为：$-\frac{y'''(x_n)}{12}h^3=O(h^3)$

方法具有"二阶"精度。

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] \end{cases}$$

4. 改进的Euler公式：

$$\because f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) = f(x_n + h, y(x_n) + hy'(x_n))$$

$$= y'(x_n) + hy''(x_n) + \frac{h^2}{2} y'''(x_n) + o(h^2)$$

其中$y' = f(x, y), \quad y'' = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} y'$

$$\therefore T = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$$

$$= y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2} h^2 + \frac{y'''(x_n)}{6} h^3 + \cdots$$

$$-y(x_n) - \frac{h}{2}[y'(x_n) + y'(x_n) + y''(x_n)h + \frac{y'''(x_n)}{2} h^2 + o(h^2)]$$

$$= -\frac{h^3}{12} y'''(x_n) + \cdots = O(h^3)$$

$\therefore$方法具有”二阶”精度。

练习

1 求差分格式 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3y'_n - y'_{n-1})$

的局部截断误差首项及方法的阶。

2 求"预测-校正"系统：

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) \end{cases}$$

的局部截断误差首项及方法的阶，并由此求解初值问题：

$$\begin{cases} y' = x + y, 0 \le x \le 0.3 \\ y(0) = 1 \end{cases} (h = 0.1)$$

答案： 1. $\frac{5h^3}{12} y'''(x_n) = O(h^3)$， 2阶方法；

2. $-\frac{h^2}{2} y''(x_n) = O(h^2)$， 1阶方法

$y(0.1) \approx y_1 = 1.12$，$y(0.2) \approx y_2 = 1.2642$，$y(0.3) \approx y_3 = 1.435262$

例 求差分格式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h[4f(x_n, y_n) + 2f(x_{n+1}, y_{n+1}) + hf'(x_n, y_n)]$$

的局部截断误差首项及其阶数。

§3 龙格-库塔公式

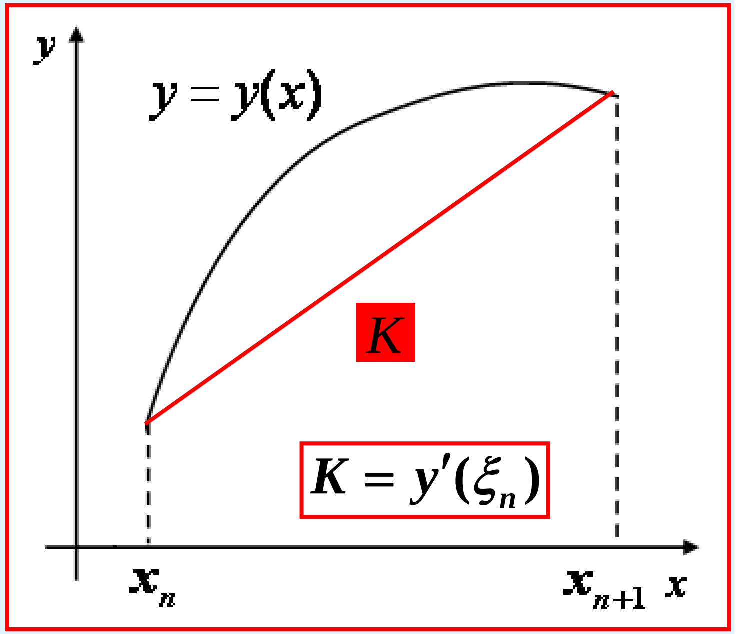
对于初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) \quad a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

对其精确解$y = y(x)$在$[x_n, x_{n+1}]$上利用微分中值定理，得

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = y'(\xi_n)(x_{n+1} - x_n)$$

其中$\xi_n \in (x_n, x_{n+1})$

即：$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(\xi_n)$$



$\therefore y'(\xi_n)$可以看作$y(x)$在$[x_n, x_{n+1}]$上的平均斜率

下面给出平均斜率$y'(\xi_n)$的几种近似表达式。

1.以$y(x)$在x_n处的斜率作为平均斜率的近似：

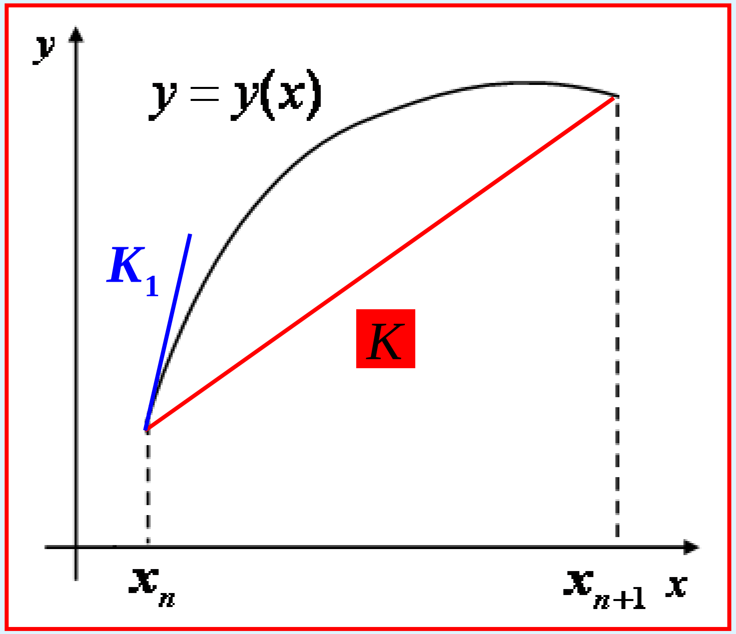
$$取 y'(\xi_n) \approx y'(x_n)$$

$$= f(x_n, y(x_n))$$

$$\approx f(x_n, y_n)$$

得 $$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

——Euler方法



2.以$y(x)$在x_{n+1}处的斜率作为平均斜率的近似：

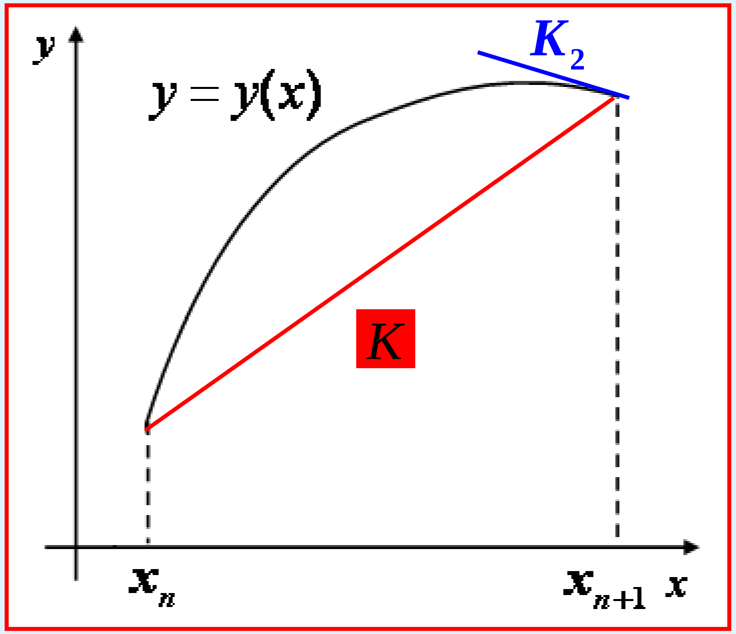
$$取 y'(\xi_n) \approx y'(x_{n+1})$$

$$= f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$$

$$\approx f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

得 $$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

——后退的Euler方法



3.以$y(x)$在x_n和x_{n+1}处近似斜率的平均值作为平均斜率的近似

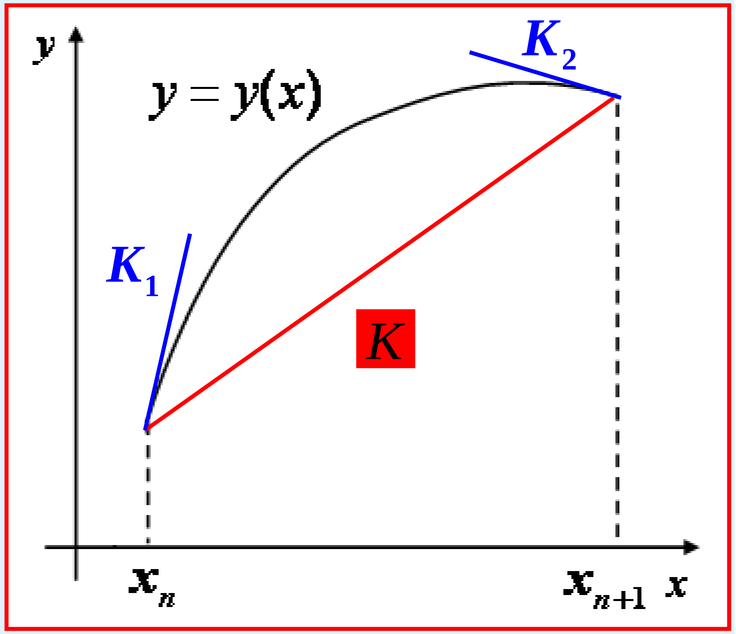
$$取 y'(\xi_n) \approx \frac{1}{2}\left(y'(x_n) + y'(x_{n+1})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))\right)$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right)$$

$$得 \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right)$$

--梯形公式



4.改进的Euler公式

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})\right) \end{cases}$$

记$k_1 = f(x_n, y_n), k_2 = f(x_{n+1}, y_n + hk_1)$

$$取 y'(\xi_n) \approx \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad 得 \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

5.推广　m级Runge-Kutta公式

在$[x_n, x_{n+1}]$内取m个点近似斜率的加权平均近似代替平均斜率$y'(\xi_n)$，即

$$
\begin{cases}
k_1 = f(x_n, y_n) \\
k_2 = f(x_n + a_2 h, y_n + h b_{21} k_1) \\
k_3 = f\left(x_n + a_3 h, y_n + h(b_{31}k_1 + b_{32}k_2)\right) \\
\quad \cdots\cdots \\
k_m = f\left(x_n + a_m h, y_n + h(b_{m1}k_1 + \cdots + b_{m,m-1}k_{m-1})\right)
\end{cases}
$$

令：$y_{n+1} = y_n + h(c_1 k_1 + c_2 k_2 + \cdots + c_m k_m)$

将其在x_n点*Taylor*展开，为使方法的阶数高，令展开式前面尽可能多的项的系数为零，从中解出a_i, b_{ij}, c_i。

二. 二阶R-K公式

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} h k_1) \\ y_{n+1} = y_n + h(c_1 k_1 + c_2 k_2) \end{cases}$$

下面确定系数a_2, b_{21}, c_1, c_2，使其精度尽可能高。

考虑局部截断误差：$T = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$

设$y_n = y(x_n)$，将k_1，k_2在x_n点Taylor展开：

$$k_1 = f(x_n, y(x_n)) = y'(x_n)$$

$$k_2 = f(x_n + a_2 h, y(x_n) + b_{21} h y'(x_n))$$

$$= f(x_n, y(x_n)) + a_2 h f_x' + b_{21} h y'(x_n) f_y' + \cdots + o(h^3)$$

$$\therefore y_{n+1} = y(x_n) + h(c_1 k_1 + c_2 k_2)$$

$$= y(x_n) + (c_1 + c_2) h y'(x_n) + c_2 a_2 h^2 f_x' + c_2 b_{21} h y'(x_n) f_y' + o(h^3)$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + o(h^3)$$

$$\therefore y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \left(1-(c_1+c_2)\right) hy'(x_n)$$

$$+ h^2 \left[\frac{1}{2} y''(x_n) - c_2 a_2 (f_x' + \frac{b_{21}}{a_2} y'(x_n) f_y') \right] + O(h^3)$$

令 $$\begin{cases} (1-(c_1+c_2)) y'(x_n) \equiv 0 \\ \frac{1}{2} y''(x_n) - c_2 a_2 (f_x' + \frac{b_{21}}{a_2} y'(x_n) f_y') \equiv 0 \end{cases}$$

得 $$\begin{cases} 1-(c_1+c_2) = 0 \\ \frac{1}{2} y''(x_n) \equiv c_2 a_a (f_x' + \frac{b_{21}}{a_2} y'(x_n) f_y') \end{cases}$$

故 $$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ f_x' + \frac{b_{21}}{a_2} y'(x_n) f_y' \equiv y''(x_n) \Rightarrow \frac{b_{21}}{a_2} = 1 \\ c_2 a_2 = 1/2 \end{cases}$$

综上可得: $$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_2 a_2 = \frac{1}{2} \\ b_{21} / a_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} h k_1) \\ y_{n+1} = y_n + h(c_1 k_1 + c_2 k_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_2 a_2 = \dfrac{1}{2} \\ b_{21} / a_2 = 1 \end{cases}$$

(1). $c_1 = c_2 = \dfrac{1}{2}, a_2 = b_{21} = 1$时

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) \\ y_{n+1} = y_n + h\left(k_1 + k_2\right)/2 \end{cases}$$

——改进的**Euler**公式

(2). 取$c_1 = 0, c_2 = 1, a_2 = b_{21} = \dfrac{1}{2}$时,

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{1}{2} hk_1) \\ y_{n+1} = y_n + hk_2 \end{cases}$$

——变形的**Euler**公式

三、三阶Runge-Kutta方法

$$
\begin{cases}
y_n = y_{n-1} + \dfrac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \\
K_1 = f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\
K_2 = f\left(x_{n-1} + \dfrac{h}{2}, y_{n-1} + \dfrac{h}{2}K_1\right) \\
K_3 = f(x_{n-1} + h, y_{n-1} + h(2K_2 - K_1)) \\
y_0 = y(x_0)
\end{cases}
$$

四、四阶Runge-Kutta方法

$$
\begin{cases}
y_n = y_{n-1} + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
K_1 = f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\
K_2 = f(x_{n-1} + \dfrac{h}{2}, y_{n-1} + \dfrac{h}{2}K_1) \\
K_3 = f(x_{n-1} + \dfrac{h}{2}, y_{n-1} + \dfrac{h}{2}K_2) \\
K_4 = f(x_{n-1} + h, y_{n-1} + hK_3) \\
y_0 = y(x_0)
\end{cases}
$$

可以证明m级显式R-K公式的精度为：

$$P=\begin{cases} m, & m=1,2,3,4 \\ m-1, & m=5,6,7 \\ \le m-2, & m\ge 8 \end{cases}$$

所以大于4阶的公式较少使用.

§4 常微分方程组和高阶微分方程的数值解法

一、常微分方程组的数值解法

下列包含多个一阶常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) & y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) & y_2(x_0) = y_{20} \\ \quad \cdots\cdots\cdots & \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) & y_n(x_0) = y_{n0} \end{cases} \qquad \text{----------(1)}$$

称为常微分方程组的初值问题

(1)式具有**n**个未知函数

做如下假设

$$\vec{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ \vec{f}(x,\vec{y})=\begin{pmatrix} f_1(x,\vec{y}) \\ f_2(x,\vec{y}) \\ \vdots \\ f_n(x,\vec{y}) \end{pmatrix},\vec{y}_0=\vec{y}(x_0)=\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}$$

则(1)式化为

$$\begin{cases} \vec{y}'=\vec{f}(x,\vec{y}) \\ \vec{y}(x_0)=\vec{y}_0 \end{cases} \qquad \text{----------(2)}$$

只要将以前所介绍的各种求解方法中的函数转化为函数向量,即可得到相应的常微分方程组的数值解法

例：建立求下面方程组的**Euler**公式

$$\begin{cases} u'(x) = \varphi(x, u, v), u(x_0) = u_0 \\ v'(x) = \psi(x, u, v), v(x_0) = v_0 \end{cases}$$

解：令 $\vec{y} = (u, v)^T, \vec{f}(x, \vec{y}) = (\varphi, \psi)^T$

则上述方程组可表示为：

$$\begin{cases} \vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

则Euler 公式为 $\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h\vec{f}(x_n, \vec{y}_n)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \varphi(x_n, u_n, v_n) \\ \psi(x_n, u_n, v_n) \end{pmatrix}$$

二、高阶常微分方程的数值解法简介

高阶微分方程的初值问题可通过变量代换为一阶微分方程组的初值问题.设有N阶常微分方程初值问题

$$y^{(N)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n)})$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(x_0) = y_0^{(N-1)} \end{cases}$$

引入新变量 $Z=(Z_1, Z_2, \ldots\ldots, Z_N)$

令 $\begin{cases} z_1 = y \\ z_2 = y' \\ \vdots \\ z_N = y^{(N-1)} \end{cases}$

可用方程组的方法求解

作变换得:

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \cdots \\ z_{N-1}' = z_N \\ z_N' = f(x, z_1, \cdots, z_{N-1}) \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1(x_0) = y_0 \\ z_2(x_0) = y_0' \\ \cdots \\ z_N(x_0) = y_0^{(N-1)} \end{cases}$$

例2. 求下列高阶微分方程的数值解

$$y''' - 3y'' - y'y = 0$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -1 \qquad (0 \le x \le 2)$$

解: 显然 $y''' = 3y'' + y'y$

假设 $y_1 = y \quad y_2 = y' \quad y_3 = y''$

则 $y_1' = y_2 \quad \boldsymbol{y_2' = y_3} \quad \boldsymbol{y_3' = 3y_3 + y_2 y_1}$

$$\boldsymbol{y_1(0) = 0, y_2(0) = 1, y_3(0) = -1}$$

即二阶问题化为微分方程组的初值问题

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = 3y_3 + y_2 y_1 \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 1, y_3''(0) = -1 \end{cases}$$

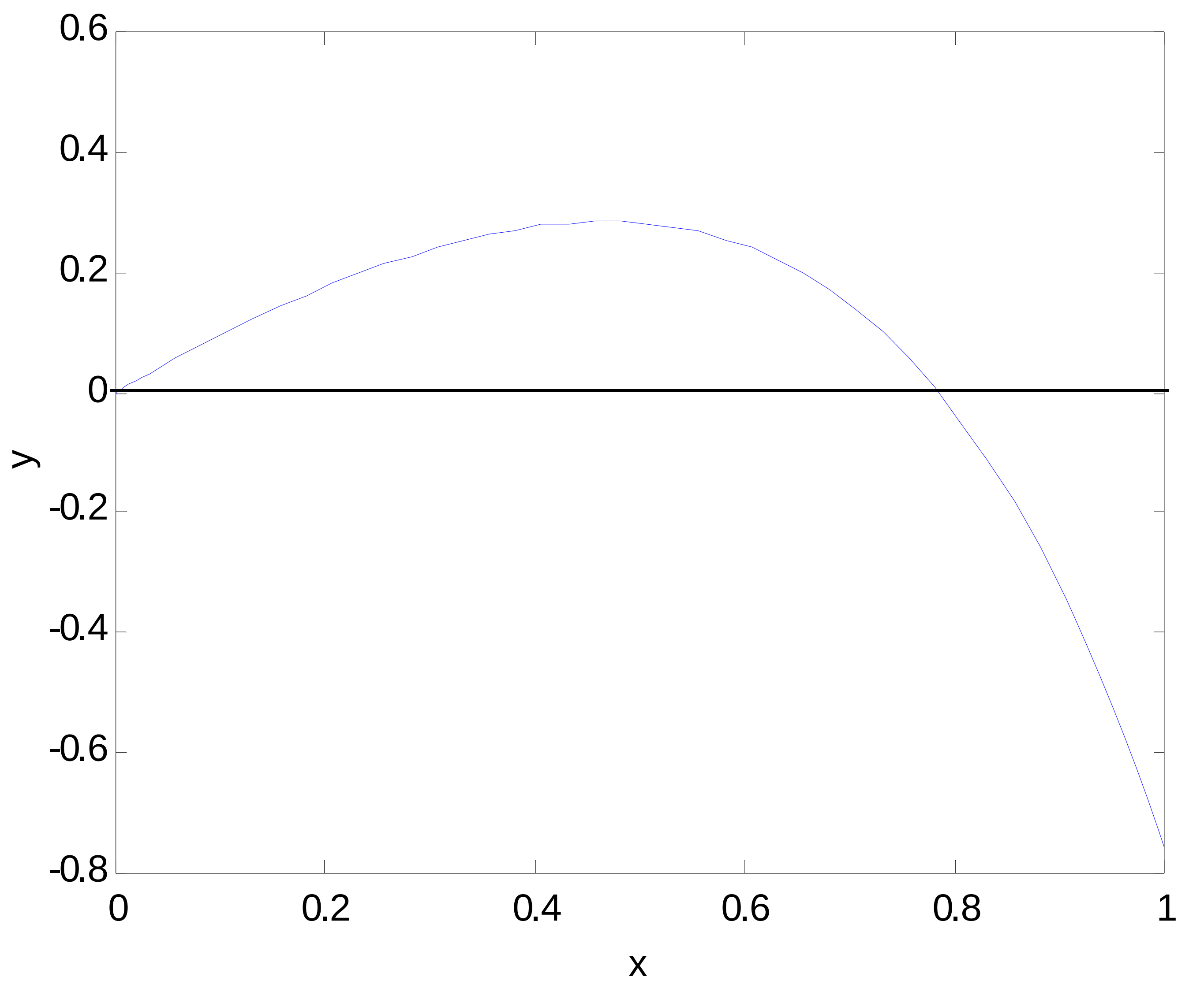
Gaojiefangcheng.m

gaojie.m

```
function  z=gaojie(x,y)
z=[y(2);y(3);y(1)*y(2)+3*y(3)];
```

```
function gaojiefangcheng()
xspan=0:0.1:1;
y0=[0,1,-1]';
[x,y]=ode45('gaojie',xspan,y0);
[x,y(:,1)]
plot(x,y(:,1))
xlabel('x')
ylabel('y')
```

x	y
0	0
0.1000	0.0945
0.2000	0.1754
0.3000	0.2381
0.4000	0.2765
0.5000	0.2822
0.6000	0.2436
0.7000	0.1451
0.8000	-0.0342
0.9000	-0.3230
1.0000	-0.7586


0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x

§5 收敛性和稳定性

收敛性

设$x > x_0$是求解区间中任一点，y_n是用某种数值方法求得的在x处的近似解(步长$h = \dfrac{x - x_0}{n}$).如果$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y(x)$则称该数值方法是收敛的.

稳定性

若某种数值方法在y_n上有误差ε_n，由此引起以后各节点上近似解$y_m\ (m > n)$误差均不超过ε，则称该方法是数值稳定的.

1 绝对稳定性

若某种数值方法对$y' = \lambda y\ \ (\lambda < 0)$是稳定的，则称该方法是绝对稳定的；

2 绝对稳定性区间

使数值方法绝对稳定的所有"$z \triangleq \lambda h$"的集合。

3 模型方程 $y' = \lambda y\ \ (\lambda < 0)$

4 举例

Euler公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

应用于模型方程 $y' = \lambda y (= f(x, y))$, 可得：

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n = (1 + h\lambda) y_n$$

设y_n有误差ε_n,则由此引起的y_{n+1}有误差ε_{n+1}满足：

$$y_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = (1 + h\lambda)(y_n + \varepsilon_n)$$

$$\varepsilon_{n+1} = (1 + h\lambda)\varepsilon_n$$

为使Euler公式绝对稳定，则$|\varepsilon_{n+1}| < |\varepsilon_n|$

令$z = \lambda h$，则有 $|1 + z| < 1 \Rightarrow -2 < z < 0$

$\therefore$ Euler公式的绝对稳定区间为：$z \in (-2, 0)$ 步长h满足：$0 < h < \left|\dfrac{2}{\lambda}\right|$

后退的Euler公式 $y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$

应用于模型方程 $y'=\lambda y(=f(x,y))$,可得：

$$y_{n+1}=y_n+h\lambda y_{n+1}$$

设y_n有误差ε_n,则由此引起的y_{n+1}有误差ε_{n+1}满足：

$$y_{n+1}+\varepsilon_{n+1}=y_n+\varepsilon_n+h\lambda(y_{n+1}+\varepsilon_{n+1})$$

即：
$$\varepsilon_{n+1}=\frac{1}{(1-h\lambda)}\varepsilon_n$$

为使Euler公式绝对稳定，则$|\varepsilon_{n+1}|<|\varepsilon_n|$

令$z=\lambda h$，则有 $\dfrac{1}{|1-z|}<1 \Rightarrow -\infty<z<0$

$\therefore$ 后退Euler公式的绝对稳定区间为：$z\in(-\infty,0)$

对于一般方程:$y' = f(x, y)$ 以Euler公式为例

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

设y_n有误差ε_n,则由此引起的y_{n+1}有误差ε_{n+1}满足:

$$y_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = (y_n + \varepsilon_n) + hf(x_n, y_n + \varepsilon_n)$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + h[f(x_n, y_n + \varepsilon_n) - f(x_n, y_n)]$$

$$= \varepsilon_n + h\frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y}\varepsilon_n = (1 + h\frac{\partial f}{\partial y})\varepsilon_n$$

可见:$\dfrac{\partial f}{\partial y}$相当于模型方程中的$\lambda$。

课后作业:

习题七:

1(3)、2、5、7、9(1)、11