第二十一讲

凸函数的等价条件，例

定理6.14

设 f 为区间 I 上的可导函数，则下述论断互相等价：

(i) $f(x)$ 为 I 上的凸函数；

(ii) $f'(x)$ 为 I 上的增函数；

(iii) 对于 I 上的任意两点 x_1，x_2，有

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

注 (iii) 中的不等式表示切线恒在凸曲线的下方.

证 (i)$\Rightarrow$(ii) 任取 $x_1, x_2 \in I$ 和正数 h, 使

$$x_1 < x_2, \text{ 且 } x_1 - h \in I,\ x_2 + h \in I.$$

已知 f 是凸函数，由(4)式

$$\frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}.$$

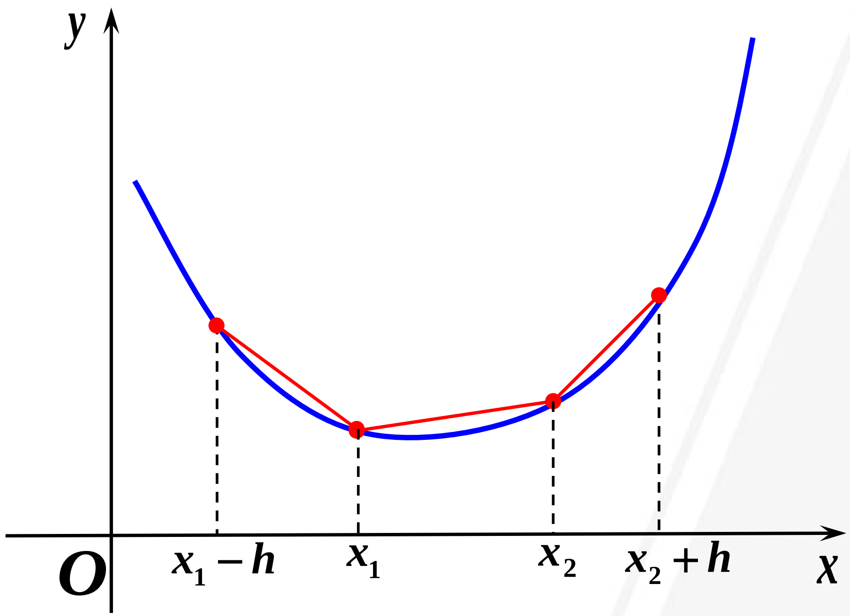
令 $h \to 0^+$,因为

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h} = f'_-(x_1) = f'(x_1),$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h} = f'_+(x_2) = f'(x_2),$$

所以 $$f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2),$$

故 $f'(x)$ 递增.


y
O
x_1-h
x_1
x_2
x_2+h
x

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 对于任意 $x_1, x_2 \in I$, 不妨设 $x_1 < x_2$.

则 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),\ x_1 < \xi < x_2$.

因为 $f'(x)$ 递增, 所以

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

对于 $x_1 > x_2$, 仍可得到相同的结论.

(ii) $f'(x)$ 为 I 上的增函数 ;

(iii) 对于 I 上的任意两点 $x_1,\ x_2$, 有

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) 仍设$x_1 < x_2$，$x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$

$(0 < \lambda < 1)$, 则

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0), \qquad (6)$$

$$f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0). \qquad (7)$$

将(6)式乘以λ, (7) 式乘以$(1-\lambda)$作和，并注意到

$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_0 = 0$, 得

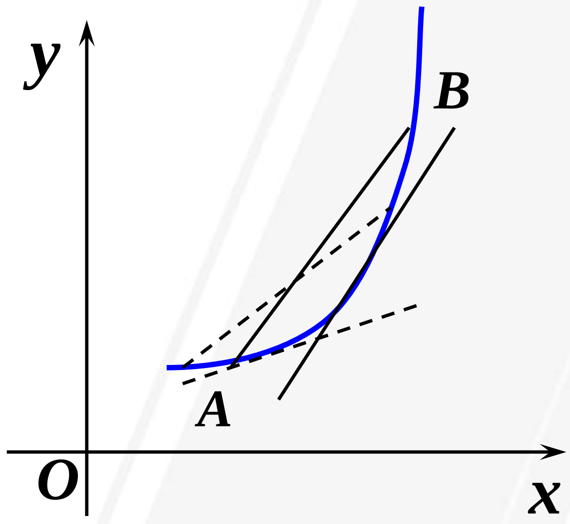
$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \geq f(x_0) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$

(iii) 对于 I 上的任意两点 x_1, x_2, 有

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

(i) $f(x)$为I 上的凸函数；

我们在这里再一次强调，函数 f 是凸函数的几何意义是：曲线 $y = f(x)$ 的弦位于相应曲线段的上方；而它的切线位于曲线的下方.



我们在定理中列出了凸函数的三个等价性质. 对于凹函数也有类似的性质，请大家写出相应的定理.

定理6.15

设 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导, 则 $f(x)$在区间I上是凸(凹)函数的充要条件为:

$$f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0).$$

证 由定理 6.14 立即可得.

例 2 讨论函数 $f(x)=\arctan x$ 的凹凸区间.

解 因为

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

$$f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

所以当 $x\in(-\infty,0)$时, $f''(x)>0$, $f(x)$ 为凸函数;

当 $x\in(0,+\infty)$时, $f''(x)<0$, $f(x)$为凹函数 .

例 3 设函数 $f(x)$为 (a,b) 上的可导凸(凹)函数. 则 $f'(x_0)=0$ 的充要条件是 x_0 为 $f(x)$ 的极值点.

(本例说明：在凸(凹)函数的条件下，可微函数的极值点与稳定点是等价的.)

证 充分性是显然的(费马定理). 下面证明必要性.

设 $f(x)$是凸函数, x_0 是 $f(x)$ 的稳定点, 即$f'(x_0)=0$.

由定理 6.14 的 (ii), $f'(x)$是递增的. 所以

(i) 当 $x\in(a,x_0)$时，$f'(x)\le 0$, $f(x)$ 是递减的， 故

$$f(x)\ge f(x_0),\ \ x\in(a,x_0);$$

(ii) 当 $x\in(x_0,b)$ 时, $f'(x)\geq 0$, $f(x)$ 是递增的, 故

$$f(x)\geq f(x_0),\ x\in(x_0,b).$$

综上, $f(x)\geq f(x_0),\ x\in(a,b).$

即 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

注 我们实际上已经证明, 对于可微凸函数，其极值总是极小值，可微凹函数的极值总是极大值.

因此下一次要讲的例4就非常自然了.