数学分析　第三章
函数极限

§3 函数极限存在的条件

在这一节中，我们仍以 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 为代表，介绍函数极限存在的条件．对于其他类型的极限，也有类似的结论．

一、 归结原则

二、 单调有界定理

三、 柯西收敛准则

*点击以上标题可直接前往对应内容

第五讲

归结原则

归结原则

定理3.8

设 f 在 $U^\circ(x_0,\eta)$ 有定义. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是: 对于在 $U^\circ(x_0,\eta)$ 内以 x_0 为极限的任何数列 $\{x_n\}$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在, 并且相等.

证 (必要性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

设 $\{x_n\}\subset U^\circ(x_0,\eta)$, $x_n\to x_0$, 那么对上述 δ, 存在 N, 当 $n>N$ 时, 有 $0<|x_n-x_0|<\delta$,

所以 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$. 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

(充分性)(下面的证法很有典型性)

设任给 $\{x_n\}\subset U^\circ(x_0,\eta)$, $x_n\to x_0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

若 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时, 不以 A 为极限, 则存在正数 ε_0, 对于任意正数 δ, 存在 $x_\delta\in U^\circ(x_0,\delta)$, 使得

$$|f(x_\delta)-A|\ge\varepsilon_0.$$

现分别取

$$\delta_1=\eta, \delta_2=\frac{\eta}{2}, \cdots, \delta_n=\frac{\eta}{n}, \cdots,$$

存在相应的 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, $x_n\in U^\circ(x,\delta_n)$,

使得

$$|f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0,\ \ n=1,2,\cdots.$$

另一方面, $0<|x_n-x_0|<\delta_n=\dfrac{\eta}{n}$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

这与 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$ 矛盾.

注　归结原则有一个重要应用:

若存在 $\{x_n\},\{y_n\}\subset U^\circ(x_0)$, $x_n\to x_0$, $y_n\to x_0$, 但是

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A\neq B=\lim_{n\to\infty}f(y_n),$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在.

例1 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 都不存在.

解 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}\to 0$, $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\to 0$, 有

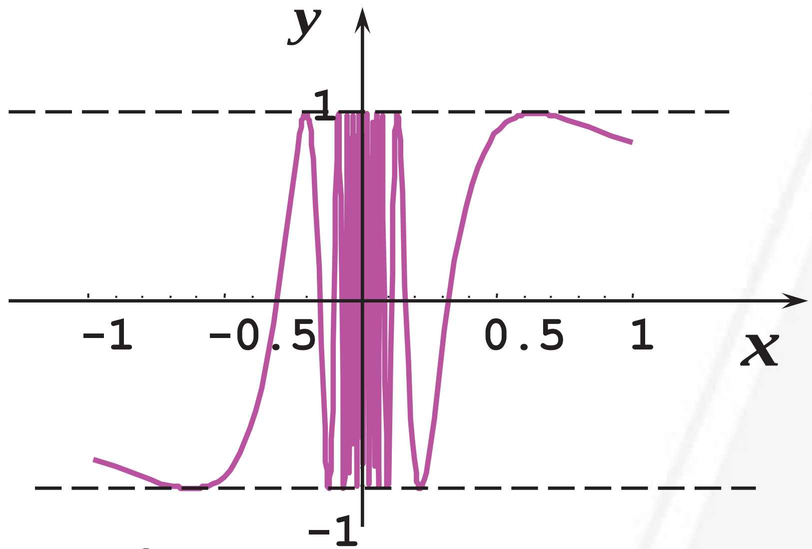
$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=0\neq 1=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{y_n},$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$,不存在.

同理可取 $x_n=2n\pi\to\infty$, $y_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\to\infty$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\cos x_n=1\neq 0=\lim_{n\to\infty}\cos y_n,$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 不存在.



从几何上看，$y = \sin\dfrac{1}{x}$ 的图象在 $x = 0$ 附近作无比密集的等幅振荡，当然不会趋于一个固定的值．为了让读者更好地掌握其他五类极限的归结原则，现写出 $x \to x_0^+$ 时的归结原则如下：

定理3.9

设 $f(x)$ 在 x_0 的某空心右邻域 $U_+^\circ(x_0)$ 有定义，则

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{任给}\{x_n\}\subset U_+^\circ(x_0),\ x_n\to x_0, \\ \text{必有}\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A. \end{cases}$$

作为一个例题，下面给出定理3.9 的另一种形式.

例 2 设 $f(x)$在 x_0 的某空心右邻域 $U_+^\circ(x_0,\eta)$上有定义. 那么 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 的充要条件是 任给严格递减的 $\{x_n\}\subset U_+^\circ(x_0,\eta)$, $x_n\to x_0$, 必有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

证 必要性应该是显然的. 下面我们证明充分性. 假若 $x \to x_0^+$ 时, $f(x)$ 不以 A 为极限. 则存在正数 ε_0, $\forall \delta > 0$, 存在 $x_\delta \in U_+^\circ(x_0,\delta)$, 使 $|f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0$.

取 $\delta_1 = \eta$, $\exists x_1, 0 < x_1 - x_0 < \delta_1$, $|f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$;

$$\delta_2 = \min\{\frac{\eta}{2}, x_1 - x_0\},$$

$\exists x_2$, $0 < x_2 - x_0 < \delta_2$, $|f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0$;

……

$$\delta_n = \min\{\frac{\eta}{n}, x_{n-1} - x_0\},$$

$\exists x_n, 0 < x_n - x_0 < \delta_n$, $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$; ……

这样就得到一列严格递减的数列 $\{x_n\} \subset U_+^\circ(x_0,\eta)$, $x_n \to x_0$, 但 $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$, 这与条件矛盾.