数学分析　第六章
微分中值定理及其应用

# §6 函数图像的讨论

在中学里学过一些简单函数的作图，采用的主要方法是描点法．这种方法比较粗糙,一般不能精确反映函数的基本特性(如单调区间，极值点，凸性，拐点)．在这一节中，将综合运用学过的微分学知识，并结合周期性、奇偶性等初等数学知识，比较完整地介绍函数的作图方法．

# 第二十四讲

## 函数图像的讨论

# 函数作图基本步骤：

(i)　确定函数的定义域，并讨论奇偶性、周期性;

(ii) 找出函数图象的特殊点，比如与两坐标轴的交点, 以及函数的不连续点、不可导点；

(iii) 确定函数的单调性区间、极值点、凸性区间、拐点；

(iv) 找出渐近线；

(v) 综合上述结果, 列表并作图.

**例1** 描绘函数 $(x-3)^2+4y-4xy=0$ 的图形.

**解** 首先 $y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$，其定义域为 $(-\infty,1),(1,+\infty)$.

原方程两边对 $x$ 求导得

$$2(x-3)+4y'-4y-4xy'=0, \qquad (1)$$

$$y'=\frac{x-3-2y}{2(x-1)}=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2},$$

(1)两边对 $x$ 求导得 $2+4y''-8y'-4xy''=0$

$$y''=\frac{1-4y'}{2(x-1)}=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

令 $y'=0$ 得 $x=-1,3$.

# 列表判别曲线形态

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,1)$ | $1$ | $(1,3)$ | $3$ | $(3,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y''$ | $-$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ |
| $y$ | 凹增 | $-2$ 极大值 | 凹减 | 无定义 | 凸减 | $0$ 极小值 | 凸增 |

求渐近线 Q $\lim\limits_{x\to 1} y=\infty$，$\therefore\ x=1$为垂直渐近线；

又因 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{4}$， 即 $a=\dfrac{1}{4}$

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)},\quad y'=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2},\quad y''=\frac{2}{(x-1)^3}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-\frac{1}{4}x)=\lim_{x\to\infty}[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}-\frac{1}{4}x]=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+9}{4(x-1)}$$

$$=-\frac{5}{4}.$$

因此有斜渐近线 $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$

求特殊点

| $x$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|
| $y$ | $-\frac{9}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$$

根据上面讨论，绘出函数的图形：

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,1)$ | $1$ | $(1,3)$ | $3$ | $(3,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 凹增 | $-2$ 极大值 | 凹减 | 无定义 | 凸减 | $0$ 极小值 | 凸增 |

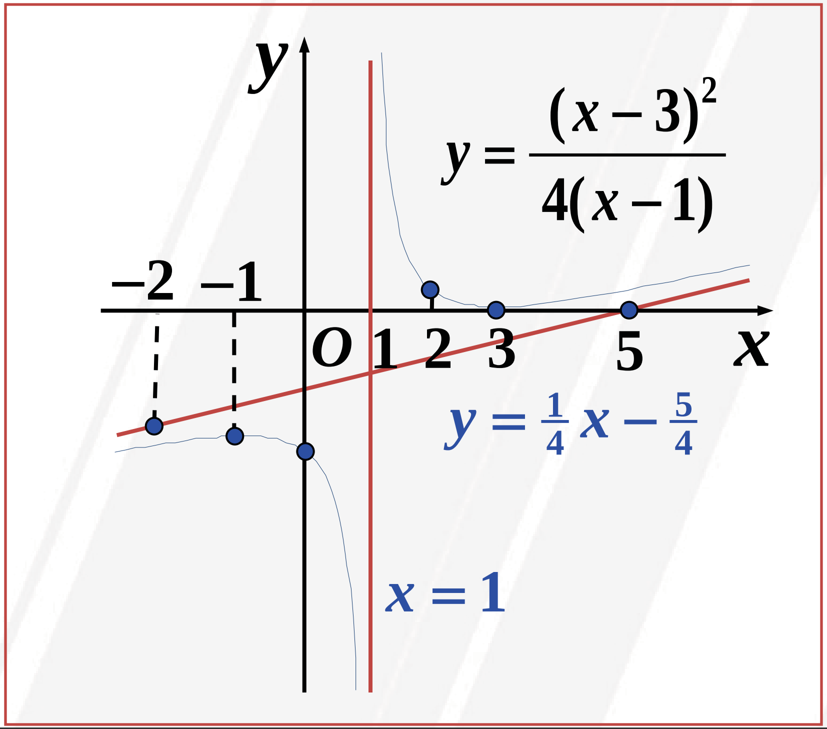
铅直渐近线 $x=1$

斜渐近线 $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$

特殊点

| $x$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|
| $y$ | $-\dfrac{9}{4}$ | $\dfrac{1}{4}$ |

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$$



**例2** 作出函数 $y=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的图像.

**解** $f(x)$ 的定义域：$x\in(-\infty, +\infty)$.

$$f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}},$$

$$f''(x)=\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{10x+2}{9x\sqrt[3]{x}}.$$

由 $f'(x)=0$, 解得 $x=\frac{2}{5}$; $x=0$时，$f'(x)$不存在.

由 $f''(x)=0$, 解得 $x=-\frac{1}{5}$; $x=0$时，$f''(x)$不存在.

# 列表判别曲线形态

| $x$ | $(-\infty,-\frac{1}{5})$ | $-\frac{1}{5}$ | $(-\frac{1}{5},0)$ | $0$ | $(0,\frac{2}{5})$ | $\frac{2}{5}$ | $(\frac{2}{5},+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | 不存在 | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | 不存在 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | 凹增 | 拐点 $(-\frac{1}{5}, f(-\frac{1}{5}))$ | 凸增 | 极大值 | 凸减 | 极小值 | 凸增 |

$f\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{3}{25}\sqrt[3]{20}$ 为极小值, $\left(-\frac{1}{5},-\frac{6}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$ 为拐 点.

$f(0)=0$为极大值,

函数图像如下：