第一章 实数集与函数

§1 实数

一、集合

集合是现代数学一个最基本的概念。集合论的奠基人是 Cantor。数学的各个分支普遍地运用集合的符号和方法，我们要养成用集合的语言来表述数学命题的习惯。

1、集合的概念

具有某种性质的事物的全体称为一个集合，组成集合的每一个事物称为该集合的元素。

解释下面记号：$a \in A, a \notin A, \varnothing$

“集合”和“元素”是不定义的名词，“属于”也是不定义的关系。

2、集合的关系

解释下面记号：$A \subset B (B \supset A)$，$A = B$（定义是 $A \subset B, B \subset A$）

3、映射

设 V 和 V' 是任意两个非空集合，如果存在某个对应关系 T，使得对 $\forall \alpha \in V$，在 V' 中有唯一的元素 α' 与之对应，则称 T 是 V 到 V' 的一个映射。记为

$$T: V \to V', \alpha \mapsto \alpha'。$$

称 α' 为 α 在 T 下的象，记为 $T(\alpha) = \alpha'$，并称 α 为 α' 在 T 下的一个原象。

记

$$T(V) = \{T(\alpha) \mid \alpha \in V\} \subset V'$$

它表示 V 在映射 T 下象的集合。

记

$$T^{-1}(\alpha') = \{\alpha \mid T(\alpha) = \alpha'\} \subset V$$

它表示 $\alpha' \in V'$ 在映射 T 下原象的集合。

如果 $T(V) = V'$，即 V' 中的所有元素都有原象，则称 T 是 V 到 V' 的满射。

如果 V 中任意两个不同的元素在 V' 中的象也不同，即当 $T(\alpha) = T(\beta)$ 时，必有 $\alpha = \beta$，

则称T是V到V'的单射。

如果T既是满射又是单射，则称T是V到V'的双射或一一对应。

当T是V到V'的一一对应，则对$\forall \alpha' \in V'$，则有唯一的$\alpha \in V$与之对应，这样定义了V'的映射，称为T的逆映射，记为$T^{-1}: V' \to V, \alpha' \mapsto \alpha$。

4、可数集与不可数集

引例：古阿拉伯人，只会数 1，如何知道谁口袋里的贝壳（钱）多？

问：对于两个无穷集，如何比较“多少”？

凡是能建立一一对应关系的两个集合，我们说它们“一样多”。比如，正整数$\{1,2,3,\cdots\}$与偶数$\{2,4,6,\cdots\}$“一样多”。

凡是能与正整数$\{1,2,3,\cdots\}$建立一一对应的集合，称为可数（无穷）集，也称可列（无穷）集。如果一个无穷集不能与正整数建立一一对应关系，则称为不可数集，或不可列集。

可以证明：

（1）有理数是可数的；

（2）无理数与实数不可数；

（3）任何区间中的无理数或实数与全体实数“一样多”。

5、集合的运算及运算律

定义：

$A \bigcup B \triangleq \{x | x \in A \text{ or } x \in B\}$

$A \bigcap B \triangleq \{x | x \in A \text{ and } x \in B\}$

$A \setminus B \triangleq \{x | x \in A \text{ and } x \notin B\}$（也记为$A - B$）

$A^{c} \triangleq \Omega \setminus A$（$\Omega$是全集）（也记为$\overline{A}$）

推广：（设I是一指标集，可以不可数）

$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \triangleq \{x | 存在某个\alpha \in I, 使得 x \in A_\alpha\}$，特别地，$\bigcup_{n=1}^{N} A_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \triangleq \{x | 对任何\alpha \in I, 都有 x \in A_\alpha\}$，特别地，$\bigcap_{n=1}^{N} A_n, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

运算律：

1° $A\bigcup A=A, A\bigcap A=A$（幂等律）

2° $A\bigcup B=B\bigcup A, A\bigcap B=B\bigcap A$（交换律）

3° $(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C),(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$（结合律）

4° $(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcup C),(A\bigcap B)\bigcup C=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)$（分配律）

5° $\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^{c}=\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha^{c},\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^{c}=\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha^{c}$（de Morgan律，对偶律）【作为作业】

6、常用符号

$\Rightarrow$："蕴涵"，"推得"，"若…，则…"

$\Leftrightarrow$："充分必要"，"当且仅当"，"等价"

$\forall$："任意"，"任一个"，"对任一个"，Any

$\exists$："存在"，"能找到"，Exist

$\ni$：使得[不常用]

R：实数全体

Q：有理数全体

Z：整数全体

$\mathbf{N}_+$：正整全体

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=x_1+x_2+\cdots+x_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i=x_1x_2\cdots x_n$$

二、实数及其性质

1、实数公理

实数是满足（I）域公理、（II）序公理和（III）连续性公理的集合。

（I）域公理：加法公理、乘法公理和分配律

（A）加法公理：

（A_1）$\forall x,y\in R\Rightarrow x+y\in R$（封闭性）

（A_2）$\forall x,y\in R\Rightarrow x+y=y+x$（交换律）

（A_3）$\forall x,y,z\in R\Rightarrow (x+y)+z=x+(y+z)$（结合律）

（A_4）存在唯一零元$0\in R$，$\forall x\in R$，满足$0+x=x$

（A_5）$\forall x\in R$，存在唯一负元$-x\in R$，满足$x+(-x)=0$

（M）乘法公理：

（M_1）$\forall x,y\in R\Rightarrow xy\in R$（封闭性）

（M_2）$\forall x,y\in R\Rightarrow xy=yx$（交换律）

（A_3）$\forall x,y,z\in R\Rightarrow (xy)z=x(yz)$（结合律）

（A_4）存在唯一单位元$1\in R$，$\forall x\in R$，满足$1x=x$

（A_5）$\forall x\neq 0\in R$，存在唯一逆元$x^{-1}\in R$，满足$xx^{-1}=1$

（D）分配律： $x(y+z)=xy+xz$

（II）序公理：

（1）三歧性：$x<y,x=y,x>y$三者必居其一，也只居其一

（2）传递性：$x<y,y<z\Rightarrow x<z$

（3）保序性：$x<y\Rightarrow x+z<y+z,x<y,c>0\Rightarrow xc<yc,$

（III）连续性公理:戴德金（Dedekind）切割原理

设$A,A'\subset \mathbf{R}$满足：

1° $A\neq\varnothing$，$A'\neq\varnothing$；

2° $A\bigcup A'=R$；

3° $\forall x\in A,\forall x'\in A'$，都有$x<x'$，

则称A与A'是$\mathbf{R}$的一个切割，记为$(A\,|\,A')$。

戴德金切割原理：对于$\mathbf{R}$的任何一个切割$(A\,|\,A')$，都存在唯一的$x^*\in\mathbf{R}$，使得对$\forall x\in A,\forall x'\in A'$，都有$x\le x^*\le x'$。

【注】戴德金切割原理形象地描述了“实数是连续不断的，没有任何空隙”。通俗地说：如果用一把没有厚度的理想的刀砍一下实数轴，那么不论砍在哪里，总要碰着数轴上的一个点（即一个实数）。

另外，实数还具有下面性质：

（1）实数具有阿基米德(Archimedes)性，即 $\forall a,b\in R,$ 若 $b>a>0$，则 $\exists n\in Z_{+}$，使得 $na>b$。

（2）实数具有稠密性，即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数，且既有有理数，也有无理数。

2、绝对值

实数 a 的绝对值定义为

$$|a|=\begin{cases} a, a\ge 0\\ -a, a<0\end{cases}$$

从数轴上看，数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离.

实数的绝对值有如下一些性质：

1° $|a|=|-a|\ge 0$；当且仅当 $a=0$ 时有 $|a|=0$

2° $-|a|\le a\le |a|$

3° $|a|<h\Leftrightarrow -h<a<h$；$|a|\le h\Leftrightarrow -h\le a\le h(h>0)$

4° 对于任何 a、$b\in\mathbf{R}$有如下的三角形不等式：

$$\big||a|-|b|\big|\le |a\pm b|\le |a|+|b|$$

5° $a\le c\le b\Rightarrow |c|\le \max(|a|,|b|)$

6° $|ab|=|a||b|$

7° $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\ne 0)$

3、常用不等式

1° **伯努利（Bernoulli）不等式**：设 $x\ge -1, n\in N_{+}$，则

$$(1+x)^{n}\ge 1+nx$$

证明：用数学归纳法。当 $n=1$ 时，上式显然以是等式的形式成立。假设成立不等式

$$(1+x)^{n-1}\ge 1+(n-1)x, x\ge -1$$

则

$$(1+x)^n=(1+x)^{n-1}(1+x)\ge\left[1+(n-1)x\right](1+x)$$

$$=1+nx+(n-1)x^2\ge 1+nx, \forall x\ge -1$$

说明对正整数 n 伯努利不等式成立。

2^{o}　**柯西-许瓦兹（Cauchy-Schwarz）不等式**：设 $x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是两组实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)$$

当且仅当 $y_i=kx_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 时，等号成立。

证明：由

$$\sum_{i=1}^{n}(x_it+y_i)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)t^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)t+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\ge 0\quad（\forall t\in\mathbf{R}）$$

得判别式

$$\Delta=4\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2-4\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\le 0$$

移项便得证。

如果 $x_i=ky_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，则不等式显然以等号形式成立。

反之，如果等号成立，则 $\Delta=0$，上面二次函数（抛物线）有零点（与 x 有交点），即存在 $t\in\mathbf{R}$ 使 $\sum_{i=1}^{n}(x_it+y_i)^2=0$，于是 $y_i=-tx_i=kx_i$。

3^{o}　**平均值不等式**：设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个正实数，则（几何平均≤算术平均）

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

当且仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都相等时，等号成立。

证明：用数学归纳法证明. 当 $n=1$ 时，上式显然以等式形式成立。假设对 $n-1$ 上式成

立，现考虑n个正数$x_1,x_2,\cdots,x_n$。不妨假设x_n是最大的。记

$$A=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$$

则

$$x_n\ge A=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\ge\sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}$$

于是

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n=\left(\frac{(n-1)A+x_n}{n}\right)^n=\left(A+\frac{x_n-A}{n}\right)^n$$

$$\ge A^n+nA^{n-1}\left(\frac{x_n-A}{n}\right)=A^n+A^{n-1}(x_n-A)=A^{n-1}x_n\ge x_1x_2\cdots x_n$$

即

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

如果$x_1,x_2,\cdots,x_n$都相等，则显然等号成立。

反之，如果$x_1,x_2,\cdots,x_n$不都相等，则上面$x_n>A$

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n=\left(A+\frac{x_n-A}{n}\right)^n>A^n+nA^{n-1}\left(\frac{x_n-A}{n}\right)$$

与上完全一样，推得严格不等号成立。

推论：设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是n个正实数，则（调和平均≤几何平均）

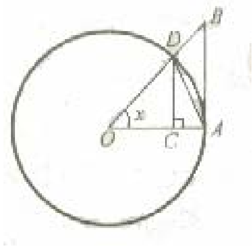
$$\frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}\le\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

在平均值不等式中用$\dfrac{1}{x_i}$换x_i（$i=1,2,\cdots,n$）即得证。

4°　三角函数不等式

$$\sin x<x<\tan x，\ 0<x<\frac{\pi}{2}$$

推论：$|\sin x|\le|x|$，其中等号仅当$x=0$时成立。



证［见教材 P43］

$$S_{\Delta OCD} < S_{扇形OAD} < S_{\Delta OAB}，\ \frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

又当 $x \geq \frac{\pi}{2}$ 时有 $\sin x \leq 1 < x$，故对一切 $x > 0$ 都有 $\sin x < x$。当 $x < 0$ 时，由 $\sin(-x) < -x$　得 $-\sin x < -x$。

综上，我们又得到不等式

$$|\sin x| \leq |x|,\ x \in R$$

其中等号仅当 $x = 0$ 时成立.

4、区间与邻域[一些记号]

$(a,b) \triangleq \{x \mid a < x < b\}$，$[a,b] \triangleq$，$(a,b] \triangleq$，$[a,b) \triangleq$

$(a,+\infty) \triangleq$，$[a,+\infty) \triangleq$，$(-\infty,a) \triangleq$，$(-\infty,a] \triangleq$，$(-\infty,+\infty) \triangleq \mathbf{R}$

$U(a,\delta) \triangleq \{x \| x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta)$

$U^{\circ}(a,\delta) \triangleq \{x | 0 < |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$

$U_{+}(a,\delta) \triangleq [a, a+\delta), U_{+}^{\circ}(a,\delta) \triangleq (a, a+\delta)$

$U_{-}(a,\delta) \triangleq \cdots, U_{-}^{\circ}(a,\delta) \triangleq \cdots$

$U(a), U_{+}(a), \cdots$

$U(\infty) \triangleq \{x \| x| > M\}$，其中 M 为某个正数

$U(+\infty) \triangleq \cdots, U(-\infty) \triangleq \cdots$

【例 1】［P3 例 2］：设 $a,b \in R$。证明：若对 $\forall \varepsilon > 0$ 有 $a < b + \varepsilon$，则 $a \leq b$。

证　用反证法．若结论不成立，即 $a > b$．令 $\varepsilon_0 = a - b > 0$，于是 $a = b + \varepsilon_0$。这与假设对 $\forall \varepsilon > 0$ 成立 $a < b + \varepsilon$ 相矛盾。从而必有 $a \leq b$。

【例 2】［P4 习题 1］：设$a\in Q,x\in R\setminus Q$（无理数）。证明$a+x\in R\setminus Q$。

证　用反证法．假设$a+x\in Q$，令$a+x=q$，则$x=q-a\in Q$，与假设矛盾。

§2 确界原理

一、有界集与无界集，上（下）确界

定义 1　设S为 **R** 中的一个数集．若存在数 M（L），使得对一切$x\in S$，都有$x\leq$M（$x\geq$L），则称 S 为**有上界（下界）的数集**，数 M（L）称为 S 的一个**上界（下界）**。若数集S既有上界又有下界，则称S为**有界集**．若S不是有界集，则称S为**无界集**.

思考：

（1）S有界$\Leftrightarrow \exists G>0,\forall x\in S,|x|\leq G$。

（2）S无界$\Leftrightarrow$ S无上界或S无下界。

（3）叙述：S无上界？S无下界？

【注】有人把S无上界用下面诗来形象描述。

南宋诗人叶绍翁的《游园不值》：应怜屐齿印苍苔 ，小扣柴扉久不开 。**春色满园关不住 ，一枝红杏出墙来** 。

【例如】

（1）$S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$（有限集），则S是有界集

$L=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n),M=\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

（2）$S=[0,1)$是有界集。$L=0,M=1$

（3）$S=\{y|y=\sin x,x\in R\}$是有界集。$|y|\leq 1$

（4）$N_+=\{1,2,3,\cdots\}$有下界，但无上界。

证：$\forall M>0$，取$n_0=[M]+1$，则$n_0>M$。

（5）$S=\left\{x\middle|x=-\dfrac{1}{t},t>0\right\}$有上界，无下界。

证：$\forall M>0$，取$0<t_0<\dfrac{1}{M}$，则$x_0=-\dfrac{1}{t_0}<-M$

引例 1：叙述：S中有最大数（无最大数），有最小数（无最小数）。

答：S中有最大数：$\exists\beta\in S,\forall x\in S,\ni x\le\beta$，则$\beta$就是$S$中的最大数。

S中无最大数：$\forall x\in S,\exists y\in S,\ni x<y$。

例如：（1）$S=[0,1]$中有最大数1，$\max S=1$。

（2）$S=[0,1)$中没有最大数，符号$\max S$不能使用。

引例 2：证明：$S=[0,1)$的最大下界是$\alpha=0$，最小上界是$\beta=1$。

证：$\alpha=0$显然是S的一个下界。如何说明α是S的最大下界？这就要证明比α大的任何一个数都不是S的下界。

$\forall\alpha':1>\alpha'>\alpha$，取$x_0=\dfrac{\alpha+\alpha'}{2}$，则$x_0\in S$且$x_0<\alpha'$，说明$\alpha'$不是$S$的下界。

类似可证$\beta=1$是S的最小上界。

定义 2　设S是$\mathbf{R}$中的一个数集．若数η满足：

（i）对一切$x\in S$，有$x\le\eta$，即η是S的上界；

（ii）对任何$\alpha<\eta$，存在$x_0\in S$，使得$x_0>\alpha$，即η又是S的最小上界，

则称数η为数集S的**上确界**，记作$\eta=\sup S$。（supremum）

【注 1】（ii）又可写成：$(\mathrm{ii})'$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in S$，$\ni x_0>\eta-\varepsilon$。

【注 2】上确界也记为$\operatorname{lub}S$（least upper bound）

定义 3　设S是$\mathbf{R}$中的一个数集．若数ξ满足：

（i）对一切$x\in S$，有$x\ge\xi$，即ξ是S的下界

（ii）对任何$\beta>\xi$，存在$x_0\in S$，使得$x_0<\beta$,即ξ又是S的最大下界，

则称数ξ为数集S的**下确界**，记作$\xi=\inf S$。（infimum）

【注 1】（ii）又可写成：$(\mathrm{ii})'$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in S$，$\ni x_0<\xi+\varepsilon$。

【注 2】下确界也记为$\operatorname{glb}S$（greatest lower bound）

上确界与下确界统称为**确界**.

【注 1】上（下）确界如果存在，则是唯一的。

【注 2】显然 $\inf S \le \sup S$

【例 1】　设数集 S 有上确界．证明**:** $\eta = \sup S \in S \Leftrightarrow \eta = \max S$

证　$\Rightarrow$) 设 $\eta = \sup S \in S$，则对一切 $x \in S$ 有 $x \le \eta$，而 $\eta \in S$，故 η 是数集 S 中最大的数，即 $\eta = \max S$.

$\Leftarrow$)　$\eta = \max S$，则 $\eta \in S$；下面验证 $\eta = \sup S$.

（i）对一切 $x \in S$，有 $x \le \eta$，即 η 可是 S 的上界;

（ii）对任何 $\alpha < \eta$，只须取 $x_0 = \eta \in S$，则 $x_0 > \alpha$，从而满足 $\eta = \sup S$ 的定义.

二、确界原理

确界原理: 设 S 为非空数集．若 S 有上界，则 S 必有上确界；若 S 有下界，则 S 必有下确界.

证 下面用戴德金切割原理来证明。

记 A' 为 S 的上界全体，则 $A' \ne \Phi$，记 $A = R \setminus A'$，则 $A \ne \Phi$。显然，$\forall x \in A, \forall x' \in A'$，都有 $x < x'$。这样 $(A\,|\,A')$ 秒构成了 R 的一个切割。由戴德金切割原理，存在唯一的数 x^*，对 $\forall x \in A, \forall x' \in A'$，都有

$$x \le x^* \le x' \qquad （1）$$

下面证明 x^* 就是 S 的上确界。

先证明 x^* 是 S 的一个上界。若不然，$\exists x_0 \in S$ 使得 $x^* < x_0$，令 $z = \dfrac{x^* + x_0}{2}$，则

$$x^* < z < x_0 \qquad （2）$$

（2）式说明 z 不是 S 的上界，所以 $z \in A$。又由（1），$z \le x^*$。这与（2）式矛盾。所以，x^* 为 S 的上界，即 $x^* \in A'$。

其次证明 x^* 是 S 的最小上界，即 x^* 是 A' 中的最小数。由（1），$\forall x' \in A'$，$x^* \le x'$。因此，x^* 是 A' 中的最小数。

【注】确界原理与切割原理等价。下面由确界原理证明切割原理。

设 $(A \mid A')$ 为 R 的一个切割，则 A 有上界，由确界原理，A 有上确界 x^*。因此，$\forall x \in A$，有 $x \le x^*$。又按切割的定义，$\forall x' \in A'$ 都是 A 的上界，从而 $x^* \le x'$。这就证明了

$$\text{对 } \forall x \in A, \forall x' \in A'\text{，都有 } x \le x^* \le x'$$

下面证明唯一性。若还有 $x_0 \ne x^*$，满足：$\forall x \in A, \forall x' \in A'$，都有 $x \le x_0 \le x'$，不妨设 $x^* < x_0$，于是令 $z = \dfrac{x^* + x_0}{2}$，有 $\forall x \in A, \forall x' \in A'$

$$x \le x^* < z < x_0 \le x'$$

从而 $\forall x \in A, \forall x' \in A'$，有 $x < z < x'$，这说明 $z \notin A, z \notin A'$，矛盾。

【例 2】 设 A, B 为非空数集，满足：对一切 $x \in A$ 和 $y \in B$ 有 $x \le y$. 证明：数集 A 有上确界，数集 B 下确界，且 $\sup A \le \inf B$

证 由假设，数集 B 中任一数 y 都是数集 A 的上界，A 中任一数 x 都是 B 的下界，故由确界原理推知数集 A 有上确界，数集 B 有下确界.

对任何 $y \in B$，y 是数集 A 的一个上界，而由上确界的定义知，$\sup A$ 是数集 A 的最小上界，故有 $\sup A \le y$. 而此式又表明数 $\sup A$ 是数集 B 的一个下界，故由下确界定义证得 $\sup A \le \inf B$.

【例 3】 设 A, B 为非空有界数集，$S = A \cup B$. 证明：

（i）$\sup S = \max\{\sup A, \sup B\}$；

（ii）$\inf S = \min\{\inf A, \inf B\}$.

证 由于 $S = A \cup B$ 显然也是非空有界数集，因此 S 的上、下确界都存在.

（i）对任何 $x \in S$，有 $x \in A$ 或 $x \in B \Rightarrow x \le \sup A$ 或 $x \le \sup B$，从而有

$x \le \max\{\sup A, \sup B\}$，故得 $\sup S \le \max\{\sup A, \sup B\}$.

另一方面，对任何 $x \in A$，有 $x \in S \Rightarrow x \le \sup S \Rightarrow \sup A \le \sup S$；同理又有 $\sup B \le \sup S$．所以 $\sup S \ge \max\{\sup A, \sup B\}$.

综上，即证得 $\sup S = \max\{\sup A, \sup B\}$.

(ii)可类似地证明.（作为作业）

规定：若把 $+\infty$ 和 $-\infty$ 补充到实数集中，并规定任一实数 a 与 $+\infty$ 、$-\infty$ 的大小关系为：$a < +\infty$，$a > -\infty, -\infty < +\infty$，则确界的概念可扩充为：

若数集 S 无上界，则定义 $+\infty$ 为 S 的**非正常上确界**，记作 $\sup S = +\infty$；

若 S 无下界，则定义 $-\infty$ 为 S 的**非正常下确界**，记作 $\inf S = -\infty$.

【例 4】*　证明实数具有阿基米德（Archimedes）性，即 $\forall a, b \in R, b > a > 0$，则 $\exists n \in N_+$，使得 $na > b$。

证：用反证法。假设 $\{na\}, n = 1, 2, \cdots$ 中没有一项大于 b，则 b 是 $\{na\}$ 的一个上界。由确界原理，$\{na\}$ 有上确界，记为 λ。即 $\forall n \in N_+, na \le \lambda$，又 $\exists n_0 \in N_+,$，使得 $n_0 a > \lambda - a$，即 $\lambda < (n_0 + 1)a$。从而

$$(n_0 + 2)a \le \lambda < (n_0 + 1)a$$

由于 $a > 0$，上式不可能成立。矛盾。

【例 5】*　证明有理数在实数中稠密。即 $\forall a, b \in R, a < b$，则 $\exists r \in Q$，满足 $a < r < b$。

证：由阿基米德性，$\exists N \in N_+$，满足 $N(b-a) > 1$ 即 $\frac{1}{N} < b - a$。令 $d = \frac{1}{N}$，则

$$d \in Q, 0 < d < b - a$$

再任取一个有理数 $r_0 < a$，在有理等差数列中 $\{r_0 + nd\}$，由阿基米德性，总有某项大于 a，设在该数列中第一个大于 a 的项是 $r = r_0 + n_0 d$，则 $a < r$，又

$$r_0 + (n_0 - 1)d < a \Rightarrow r_0 + n_0 d \le a + d < a + (b - a) = b$$

即 $r < b$。所以 $r = r_0 + n_0 d$ 即为所求。

§3 函数

（包括教材中的第 3 节与第 4 节）

一、函数

定义 1　映射 $f: D \subset R \to R, x \mapsto y = f(x)$ 称为数集 D 上的**函数**。称 D 为函数 f 的**定义域**，称

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\} \subset R$$

为函数 f 的**值域**。

定义 2 如果 $f: D \to f(D)$ 是一一对应，则存在逆映射

$$f^{-1}: f(D) \to D, y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

称为 f 的**反函数**（或逆函数）。

定义 3 设有两函数

$$\begin{aligned} y &= f(u), u \in D, \\ u &= g(x), x \in E. \end{aligned} \qquad (1)$$

记 $E^* = \{x \mid g(x) \in D\} \bigcap E$. 若 $E^* \neq \phi$, 则对每一个 $x \in E^*$，可通过函数 g 对应 D 内唯一的一个值 u，而 u 又通过函数 f 对应唯一的一个值 y . 这就确定了一个定义在 E^* 上的函数，它以 x 为自变量，y 为因变量，记作

$$y = f(g(x)), x \in E^* \text{或} y = (f \circ g)(x),\ x \in E^*$$

称为函数 f 和 g 的**复合函数**．并称 f 为外函数，g 为内函数，(1)式中的 u 为中间变量．函数 f 和 g 的复合运算也可简单地写作 $f \circ g$.

注 1　函数 f 也是函数 f^{-1} 的反函数．或者说，f 与 f^{-1} 互为反函数．并有

$$f^{-1}(f(x)) \equiv x, x \in D\text{；}\quad f\left(f^{-1}(y)\right) \equiv y, y \in (D)$$

注 2　上面反函数 f^{-1} 的表示式中，是以 y 为自变量，x 为因变量．若按习惯仍用 x 作为自变量的记号，y 作为因变量的记号，则反函数可改写为

$$y=f^{-1}(x),x\in f(D)$$

例如，按习惯记法，函数 $y=ax+b(a\neq 0)$ 的反函数为 $y=\dfrac{x-b}{a}$。

【例 1】 函数 $y=f(u)=\sqrt{u},u\in D=[0,+\infty)$ 与函数 $u=g(x)=1-x^2,x\in E=R$ 的复合函数为

$$y=f(g(x))=\sqrt{1-x^2}\text{, 或}(f\circ g)(x)=\sqrt{1-x^2}$$

其定义域 $E^*=[-1,1]\subset E$.

【例 2】 符号函数

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1,x>0\\0,x=0\\-1,x<0\end{cases}$$

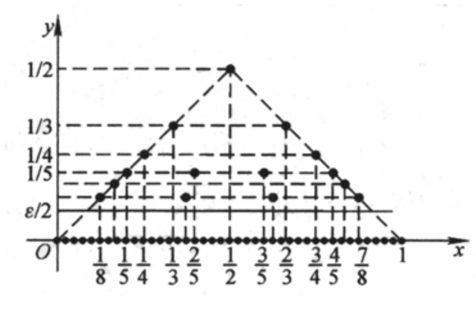
【例 3】 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1,x\in Q\\0,x\notin Q\end{cases}$$

【例 4】 Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q},\text{当}x=\dfrac{p}{q},p,q\in N_+,\dfrac{p}{q}\text{为既约真分数}\\0,\text{当}x=0,1\text{和}(0,1)\text{中的无理数}\end{cases}$$

定义域为［0,1］



【例 5】 取整函数

$$f(x)=[x]\text{（不超过 }x\text{ 的最大整数）}$$

即 $[x]$ 为整数且满足

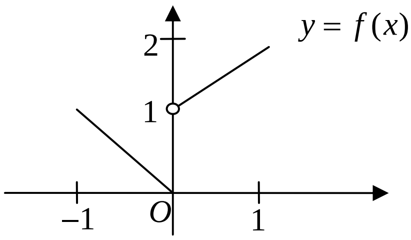
$$x-1<[x]\le x$$

例如：$[0]=0,[2]=2,[2.5]=2,[-\pi]=4$

【例 6】　求函数

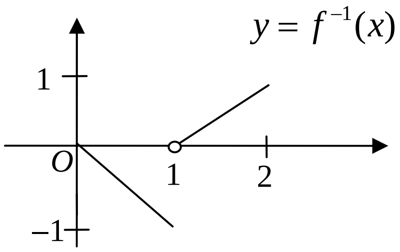
$$f(x)=\begin{cases}-x,-1\le x\le 0\\ x+1,0<x\le 1\end{cases}$$

的反函数。



解：反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}-x,0\le x\le 1\\ x-1,1<x\le 2\end{cases}$$



二、具有某些特性的函数

1. 有界函数

定义 4：设 $f:D\to R$，如果 $f(D)$ 有上界，则称 f 为 D 上的有上界的函数。

类似地：有下界，有界，无界，无上界，无下界。

定义 5：$\sup\limits_{x\in D} f(x)=\sup f(D),\inf\limits_{x\in D} f(x)=\inf f(D)$

【例 7】　证明　$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 为 $(0,1]$ 上的无上界函数 .

证　对任何正数 M，取 $(0,1]$ 上一点 $x_0=\dfrac{1}{M+1}$，则有

$$f(x_0)=\frac{1}{x_0}=M+1>M\ .$$

故 f 为 $(0,1]$ 上的无上界函数.

【例 8】　设 f，g 为 D 上的有界函数.证明：

(i) $\inf\limits_{x\in D} f(x)+\inf\limits_{x\in D} g(x)\le \inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$ ；

(ii) $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le \sup\limits_{x\in D} f(x)+\sup\limits_{x\in D} g(x)$.

证　(i)对任何 $x\in D$ 有

$$\inf_{x\in D} f(x)\le f(x),\inf_{x\in D} g(x)\le g(x)\Rightarrow \inf_{x\in D} f(x)+\inf_{x\in d} g(x)\le f(x)+g(x).$$

上式表明，数 $\inf\limits_{x\in D} f(x)+\inf\limits_{x\in D} g(x)$ 是函数 $f+g$ 在 D 上的一个下界，从而

$$\inf_{x\in D} f(x)+\inf_{x\in D} g(x)\le \inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}.$$

(ii)可类似地证明(略).

【例 9】[第一章总练习题 12]　设 f,g 为 D 上的有界函数. 证明:

$$\sup_{x\in D} f(x)+\inf_{x\in D} g(x)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$$

证法 1: $\forall x_0\in D$

$$f(x_0)+\inf_{x\in D} g(x)\le f(x_0)+g(x_0)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$$

$$f(x_0)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}-\inf_{x\in D} g(x)$$

说明 $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}-\inf\limits_{x\in D} g(x)$ 是 $f(x)$ 的一个上界，而 $\sup\limits_{x\in D} f(x)$ 是 $f(x)$ 的最小上界。从而

$$\sup_{x\in D} f(x)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}-\inf_{x\in D} g(x)$$

移项即得证。

证法 2:　$\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in D$，使得 $f(x_0)>\sup f(x)-\varepsilon$ 。因此

$$\sup f(x)-\varepsilon+\inf g(x)\le f(x_0)+g(x_0)\le \sup\{f(x)+g(x)\}$$

$$\sup f(x)+\inf g(x)\le \sup\{f(x)+g(x)\}+\varepsilon$$

由 ε 的任意性

$$\sup f(x)+\inf g(x)\le \sup\{f(x)+g(x)\}$$

【例 10】[第一章总练习题 16]　（常用结论）

设 $f(x)$ 在区间 I 上有界，记 $M=\sup\limits_{x\in I} f(x)$，$m=\inf\limits_{x\in I} f(x)$，证明

$$\sup_{x',x''\in I}\left|f(x')-f(x'')\right|=M-m。$$

证 只证 $m<M$ 的情况，否则 f 为常数结论显然成立。

一方面，由 $m\le f(x)\le M$，知 $\left|f(x')-f(x'')\right|\le M-m$（$x',x''\in I$）

于是

$$\sup_{x',x''\in I}\left|f(x')-f(x'')\right|\le M-m$$

另一方面，由确界的定义，对 $\forall\varepsilon>0$（不妨 $\varepsilon<M-m$），$\exists x',x''\in I$ 使

$$f(x')>M-\frac{\varepsilon}{2}，\quad f(x'')<m+\frac{\varepsilon}{2}$$

这时 $f(x')-f(x'')>M-\dfrac{\varepsilon}{2}-(m+\dfrac{\varepsilon}{2})=(M-m)-\varepsilon$

综上两个方面，得 $\sup\limits_{x',x''\in I}\left|f(x')-f(x'')\right|=M-m$。

2. 单调函数

定义 6　设 f 为定义在 D 上的函数．若对任何 $x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时，总 有

（i） $f(x_1)\le f(x_2)$, 则称 f 为 D 上的**增函数**，特别当成立严格不等式 $f(x_1)<f(x_2)$ 时，称 f 为 D 上的**严格增函数**；

(ii) $f(x_1)\ge f(x_2)$，则称 f 为 D 上的**减函数**，特别当成立严格不等式 $f(x_1)>f(x_2)$ 时，称 f 为 D 上的**严格减函数**；

增函数和减函数统称为**单调函数**，严格增函数和严格减函数统称为**严格单调函数**.

【例 11】[习题 1.4：3(2)] $y=\sin x$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 严格递增；

证　设 $-\dfrac{\pi}{2}\le x_1<x_2\le\dfrac{\pi}{2}$, 则

$$f(x_1)-f(x_2)=2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}<0$$

这是由于 $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}<\dfrac{\pi}{2}$， $\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}>0,-\dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{x_1-x_2}{2}<0,\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}<0$

所以 $f(x_1)<f(x_2)$， $f(x)$ 严格递增。

定理 1　设 $y=f(x),x\in D$ 为严格增(减) 函数，则 f 必有反函数 f^{-1}，且 f^{-1} 在其定义域 $f(D)$ 上也是严格增(减)函数.

证　设 f 在 D 上严格增. 对任一 $y\in f(D)$，有　$x\in D$ 使 $f(x)=y$. 下面证明这样的 x 只能有一个. 事实上，对于 D 内任一 $x_1\neq x$，由 f 在 D 上的严格增性，当 $x_1<x_2$ 时 $f(x_1)<y$，当 $x_1>x$ 时有 $f(x_1)>y$，总之 $f(x_1)\neq y$. 这就说明，对每一个 $y\in f(D)$，都只存在唯一的一个 $x\in D$，使得 $f(x)=$y，从而函数 f 存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f$ (D).

现证 f^{-1} 也是严格增的. 任取 $y_1,y_2\in f$ (D)，$y_1<y_2$ · 设 $x_1=f^{-1}(y_1),x_2=f^{-1}(y_2)$，则 $y_1=f(x_1),y_2=f(x_2)$. 由 $y_1<y_2$ 及 f 的严格增性，显然有 $x_1<x_2$，即 $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$. 所以反函数 f^{-1} 是严格增的.

3. 奇（偶）函数

定义 7　设 D 是对称于原点的数集，f 是定义在 D 上的函数。若对 $\forall x\in D$，有

$$f(-x)=-f(x)\quad (f(-x)=f(x))$$

则称 f 为 D 上的奇（偶）函数。

【例 12】[习题 1.4：6(3)］　证明 $[-a,a]$ 上任何一个函数都可写成一个偶函数与一个奇函数的和。

4. 周期函数

定义 8　设 f 是定义在 D 上的函数。若存在 $\sigma>0$，使得 $\forall x\in D,x\pm\sigma\in D$，有

$f(x\pm\sigma)=f(x)$

则称 f 为**周期函数**。σ 称为 f 的一个**周期**。若周期函数 f 的周期中存在最小的周期，则称该最小周期为 f 的**基本周期**。

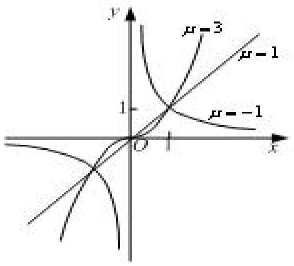
【例 13】　考察 Dirichlet 函数的周期性。

三、初等函数

基本初等函数有以下六类:

常量函数　$y = c$ （c 是常数);

幂函数　$y = x^{\mu}$ $\left(\mu\text{为实数}\right)$;



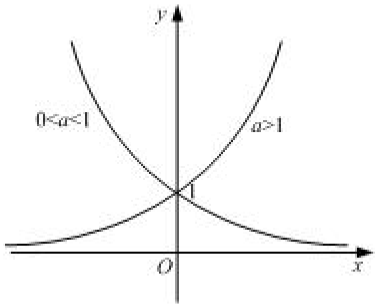
μ 偶数，$D_f = (-\infty, +\infty), R_f = [0, +\infty)$，偶函数

μ 奇数，$D_f = (-\infty, +\infty), R_f = (-\infty, +\infty)$，奇函数

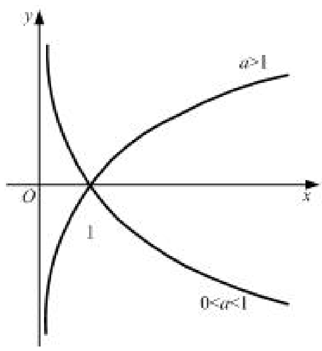
μ 负整数，$D_f = (-\infty, +\infty) \setminus \{0\}, R_f$ 由 $|\mu|$ 的奇偶性定

μ 任意数，$D_f = (0, +\infty), R_f = (0, +\infty)$

指数函数　$y = a^x$ **(** $a > 0, a \neq 1$) **;** $x \in (-\infty, +\infty)$

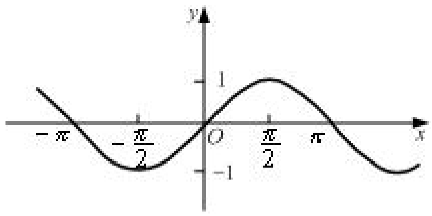


对数函数　$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$; $x \in (0, +\infty)$

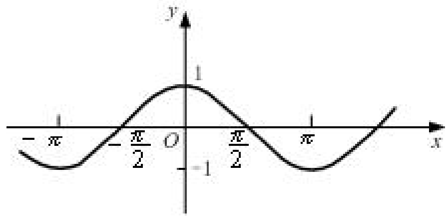


三角函数

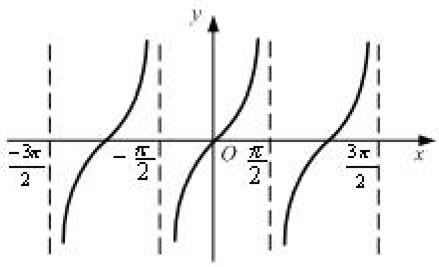
正弦函数 $y=\sin x$，　$x\in(-\infty,+\infty), y\in[-1,1]$



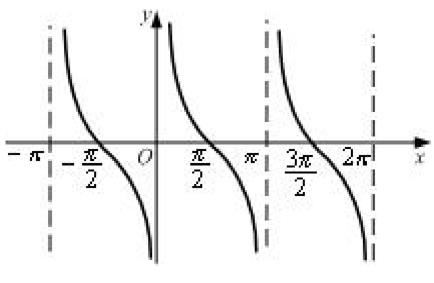
余弦函数 $y=\cos x$，　$x\in(-\infty,+\infty), y\in[-1,1]$



正切函数 $y=\tan x$，　$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in Z, y\in(-\infty,+\infty)$

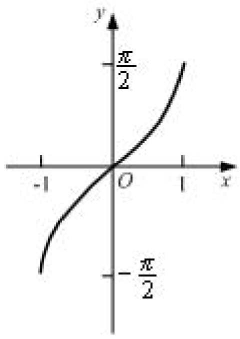


余切函数 $y=\cot x, x\neq k\pi, k\in Z, y\in(-\infty,+\infty)$

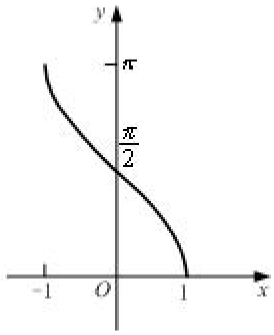


反三角函数

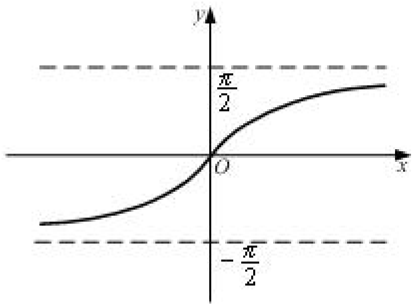
反正弦函数 $y=\arcsin x, x\in[-1,1], y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$



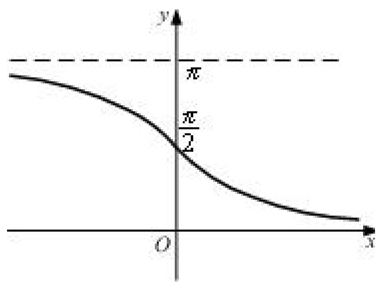
反余弦函数 $y=\arccos x$, $x\in[-1,1]$, $y\in\left[0,\pi\right]$



反正切函数 $y=\arctan x$， $x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$



反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$， $x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in\left(0,\pi\right)$



【注】 这里我们要指出，幂函数 $y=x^a$ 和指数函数 $y=a^x$ 都涉及乘幂，而在中学数学课程中只给出了有理数乘幂的定义。我们可以借助确界来定义无理数幂（见下面定义），使它与有理数幂一起构成实指数乘幂，并保持有理数幂的基本性质。

给定实数 $a>0$，设 x 为无理数，我们规定

$$a^x=\begin{cases}\sup\limits_{r<x}\{a^r \mid r\text{为有理数}\}，\text{当}a>1\text{时}，\\ \inf\limits_{r<x}\{a^r \mid r\text{为有理数}\}，\text{当}0<a<1\text{时}\end{cases}.$$

定义 9 由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到的函数，统称为**初等函数**. 不是初等函数的函数，称为**非初等函数**.

【例 14】［习题 1.3：11］问 $y=|x|$ 是初等函数吗？

答：$y=|x|=\sqrt{x^2}$ 是初等函数。

注：$y=|x|$ 还可表示为 $y=x\,\mathrm{sgn}(x)$

【例 15】［第一章总练习题：2］设 f 和 g 都是 D 上的初等函数。定义

$$M(x)=\max\{f(x),g(x)\},x\in D$$

问 $M(x)$ 是初等函数吗？

答：是。由第一章总练习题：1，

$$M(x)=\frac{1}{2}(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|)$$

再结合例 14，知 $M(x)$ 是初等函数。