第二讲

实数的基本性质 2

实数的阿基米德性

实数具有阿基米德性:

$\forall a,b\in \mathbf{R}_+$, $\exists n\in \mathbf{N}_+$, 使得 $nb>a$.

理由如下：设

$$a=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,\quad a_0=k\in \mathbf{N},$$

则 $a\le k+1<10^{k+1}$.

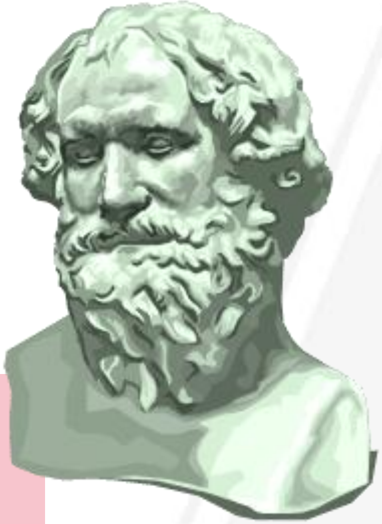
设 $b=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$, b_p为第一个不为零的正整数,

令 $n=10^{p+k+1}$, 则 $nb\ge 10^{k+1}>a$.

例1 若 $b>0$, 则 $\exists n\in \mathbf{N}_+$, 使得 $\dfrac{1}{n}<b.$

证 令 $a=1$, 由阿基米德性, $\exists n\in \mathbf{N}_+$,

使 $nb>1$, 即 $\dfrac{1}{n}<b.$



阿基米德 (Archimedes, 287B.C.－212B.C. , 希腊)

实数的稠密性

1. 任意两个不相等的实数 a 与 b 之间，必有另一个实数 c. 例如 $c = \dfrac{a+b}{2}$.

2. 任意两个不相等的实数 a 与 b 之间，既有有理数又有无理数.

证 若 $a < b$，则由例 1，存在 $n \in \mathrm{N}_+$，使

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{2}(b-a).$$

设 k 是满足 $\dfrac{k}{n} \le a$ 的最大的正整数，即 $\dfrac{k+1}{n} > a$.

于是，$a < \dfrac{k+1}{n} < \dfrac{k+2}{n} < b$，则 $\dfrac{k+1}{n}$，$\dfrac{k+2}{n}$ 是

a 与 b 之间的有理数，而 $\dfrac{k+1}{n} + \dfrac{\pi}{4n}$ 是 a 与 b 之间

的无理数.

例2 若 $a, b \in \mathbf{R}$，对 $\forall \varepsilon > 0$，$a < b + \varepsilon$，则 $a \le b$.

证 倘若 $a > b$，令 $\varepsilon = a - b > 0$，则 $a = b + \varepsilon$，

与 $a < b + \varepsilon$ 矛盾.

实数与数轴上的点一一对应

实数集 R与数轴上的点可建立一一对应关系.

1. 这种对应关系，粗略地可这样描述：

设 P 是数轴上的一点(不妨设在0的右边)，若 P 在整数 n 与 $n+1$之间，则 $a_0 = n$.

把$(n, n+1]$十等分，若点 P 在第 i 个区间，则 $a_1 = i$.

类似可得到 a_n，$n = 2, 3, \cdots$. 这时，令点 p 对应于

$$a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots.$$

反之，任何一实数也对应数轴上一点.

2.实数集与数轴上点的一一对应关系反映了实数的完备性，我们将在后面有关章节中作进一步讨论.

实数的绝对值与三角形不等式

1. 实数 a 的绝对值 $|a|$ 定义为

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geq 0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$$

2. 实数的绝对值性质:

(1) $|a|=|-a|\geq 0$; 当且仅当 $a=0$ 时 $|a|=0$.

(2) $-|a|\leq a\leq |a|$.

(3) $|a|<h \Leftrightarrow -h<a<h$, $|a|\leq h \Leftrightarrow -h\leq a\leq h$.

(4) $|a|-|b| \le |a+b| \le |a|+|b|$ (三角形不等式).

(5) $|ab|=|a||b|$.

(6) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\ (b\ne 0)$.

3. 三角形不等式 $|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b|$ 的证明:

由 $-|a|\le a\le|a|,\ -|b|\le b\le|b|$ 得

$$-(|a|+|b|)\le a+b\le|a|+|b|,$$

即 $|a+b|\le|a|+|b|$.

又 $|a|=|a-b+b|\le|a-b|+|b|$, 即 $|a|-|b|\le|a+b|$.