第一讲

数集的界与确界

有界数集的概念

- 非空集合 S 是有界集合： 存在正数 M，使得对任意的 $x \in S$，有 $|x| \le M$.

  注 有界集的几何意义是它位于某闭区间内.

- 非空集合 S 是有上界集合：存在正数 M，使得对任意的 $x \in S$，有 $x \le M$.

- 非空集合 S 是有下界集合：存在正数 M ，使得对任意的 $x \in S$，有 $x \geq -M$.

注 集合有界的充要条件是 既有上界又有下界.

注 若 M 是 S 的上界，比 M 大的数均为 S 上界.

思考 集合无界（无上界、下界）该如何刻划？

例 1. 求证集合 S 既有上界又有下界，其中

$$S=\{\sqrt[n]{2^n+3^n}\mid n=1,2,\cdots\}$$

证明 取 $M=6$，则

$$\sqrt[n]{2^n+3^n}\le\sqrt[n]{2\cdot 3^n}\le 6$$

同理可证有下界.

注 这里所取上界不一定是最佳，我们并不强调其最佳性.

例 2. 证明 $S=\{(1+(-1)^n)n \mid n=1,2,\cdots\}$无上界.

证明 $\forall M>1$, 取

$$x_0=4[M+1]\in S,$$

则 $x_0>M$.

注 这里必须保证 $x_0\in S$

例 3. 设 S 是一个无限数集，常数 $\delta>0$. 如果对 $\forall a,b\in S$，只要 $a\neq b$，有 $|a-b|\geq\delta$ 成立.

求证： S 是无界集合.

证明 （反证法） 假设 S 是有界集，

则存在 $M>0$, 使得$\forall x\in S$, $|x|\leq M$.

取自然数 n ：$\frac{M}{n}<\delta$.

将$[-M,M]$等分成 $2n$个闭区间：

$$\left[-M,-M+\frac{M}{n}\right],\left[-M+\frac{M}{n},-M+\frac{2M}{n}\right],\cdots,\left[-\frac{M}{n},0\right],$$

$$\left[0,\frac{M}{n}\right],\left[\frac{M}{n},\frac{2M}{n}\right],\cdots,\left[\frac{(n-1)M}{n},M\right].$$

因 S 是无限集，上面的闭区间中至少有一个包含 S 的两个不同元素 a,b，此时有

$$|a-b|\le\frac{M}{n}<\delta,$$

产生矛盾， 因此 S 是无界集.

数集确界的概念

数 η 是非空集合S 的上确界是指：

1）对 $\forall\, x \in S$，有 $x \le \eta$；

2）对$\forall\, \alpha < \eta$，$\exists\, x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \alpha$.

即 η 是S 的最小上界，记作

$$\eta = \sup S$$

其中条件 2）相当于

2’）对 $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in S$，使得

$$x_0 > \eta - \varepsilon$$

数 ξ 是非空集合 S 的下确界是指:

1）对 $\forall\, x \in S$，有 $x \geq \eta$;

2）对 $\forall \beta > \xi$，$\exists\, x_0 \in S$，使得 $x_0 < \beta$.

即 ξ 是 S 的最大下界，记作

$$\xi = \inf S$$

其中条件 2）相当于

2’）对 $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in S$，使得

$$x_0 < \xi + \varepsilon$$

例 4. 设 $S=\{1+r\pi;\ r<\pi, r\in\mathbb{Q}\}$，求其上确界.

解 $\sup S=1+\pi^2$. 验证如下.

由于 $\forall x=1+r\pi$, $r\in\mathbb{Q}, r<\pi$, $x<1+\pi^2$.

对 $\forall\beta<1+\pi^2$，有 $\dfrac{\beta-1}{\pi}<\pi$.

由有理数在实数中的稠密性有,

$$\exists r_0\in\left(\frac{\beta-1}{\pi},\pi\right)\cap\mathbb{Q}$$

这就说明

$$x_0 := 1 + r_0\pi \in S,\ 且\ x_0 > \beta.$$

根据上确界的定义有 $\sup S = 1 + \pi^2$.

注 若将 r 是有理数的要求去掉结论和证明有什么变化吗？

例 5. 设 S 是非负有界数集，记 $S^2=\{x^2;\ x\in S\}$，

求证： $$\sup(S^2)=(\sup S)^2$$

证明 由于S 有界，据确界原理，该集合的上确界

$\alpha=\sup S$存在. 下面验证 $\sup(S^2)=\alpha^2$.

对任意 $x^2\in S^2$，其中 $x(\geq 0)\in S$. 故 $x^2\leq\alpha^2$.

对任意 $\beta<\alpha^2$，不妨$\beta>0$ ， 则

$$\sqrt{\beta}<\alpha$$

由 $\alpha = \sup S$，存在 $x_0 \in S$， 使得 $x_0 > \sqrt{\beta}$

$$\therefore\ x_0^2 \in S^2,\ x_0^2 > \beta$$

练习

设 S 是非空数集，记 $S^- = \{x; -x \in S\}$，

求证：

$$\inf S^- = -\sup S,\quad \sup S^- = -\inf S.$$

例 6. 设 A, B 是两个非空有界数集，满足：

1）$\forall a \in A, b \in B$, 有 $a < b$ ；

2）$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, y \in B$, 使得 $y - x < \varepsilon$.

求证：$\sup A = \inf B$

证明 由确界原理，$\sup A, \inf B$ 均存在.

由 1），任意取定 $b \in B$ ，对 $\forall a \in A, a < b$.

故 $\sup A \le b$ ，从而 $\sup A \le \inf B$.

由 2）, $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, y \in B$, 有

$$y < x + \varepsilon \le \sup A + \varepsilon.$$

故

$$\inf B \le y \le \sup A + \varepsilon$$

从而 $\inf B \le \sup A$.

综上，有

$$\sup A = \inf B.$$

广义确界的概念

规定：

1）无上界的集合的上确界为 $+\infty$

2）无下界的集合的下确界为 $-\infty$

例 7. 设数集

$$S=\left\{1+n\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)^2;n\in\mathbb{N}\right\}$$

求 $\sup S,\inf S$.

解 令

$$S_1=\left\{1+n\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)^2;n=2k-1,k\in\mathbb{N}\right\}$$

则

$$S_1 = \{1 + 2k - 1; k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \ldots\}$$

显然 S_1 无上界，又 $S_1 \subset S$ ，故 S 无上界

由此，

$$\sup S = +\infty$$

又 S 有最小值 1 ，故

$$\inf S = 1$$