第六讲

单调有界定理
及 柯西准则

单调有界定理

定理3.10

设 f 为定义在 $U_{+}^{\circ}(x_0)$ 上的单调有界函数，则右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在.

（相信读者也能够写出关于 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 的单调有界定理.）

证 不妨设 f 在 $U_{+}^{\circ}(x_0)$ 递减. 因为 $f(x)$ 有界，故

$$\sup_{x\in U_{+}^{\circ}(x_0)} f(x)$$

存在，设为 A. 由确界定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\, x^{*}\in U_{+}^{\circ}(x_0)$，使

$$A-\varepsilon < f(x^*) \le A.$$

令 $\delta = x^* - x_0$，当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时，由 $f(x)$ 的递减性，

$$A-\varepsilon < f(x^*) \le f(x) \le A < A+\varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

例1 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上递增，$x_0 \in (a,b)$.

求证：$f(x_0-0) \le f(x_0) \le f(x_0+0)$.

证 因 f 在 $U_-(x_0)$ 上单调有界，由单调有界定理，

左极限 $f(x_0-0)$ 存在，且等于 $\sup\limits_{x\in U_-(x_0)} f(x)$.

而对 $\forall x \in U_-(x_0)$，$f(x) \le f(x_0)$. 故 $f(x_0-0) \le f(x_0)$.

类似地，$f(x_0) \le f(x_0+0)$.

注 若 $f(x)$ 递减，则 $f(x_0+0) \le f(x_0) \le f(x_0-0)$.

例2 设 $f(x)$ 在$U_+^\circ(x_0,\eta)$上单调，则 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在的充要条件是存在一个数列

$$\{x_n\}\subset U_+^\circ(x_0,\eta)\,,\ x_n\to x_0\,,$$

使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在.

证 必要性可直接由归结原则得出，下面证明充分性.

假设 $f(x)$递减.

设 $\{x_n\}\subset U_+^\circ(x_0,\eta)$，$x_n\to x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A.$

首先说明 $\forall x \in U_+^\circ(x_0,\eta)$, $f(x) \le A$. 对 $\forall x \in U_+^\circ(x_0,\eta)$,

因为 $x_n \to x_0$, 由保号性, $\exists N_0$, $\forall n > N_0$, $x_n < x$,

所以 $f(x) \le f(x_n)$, 令 $n \to \infty$, 有 $f(x) \le A$.

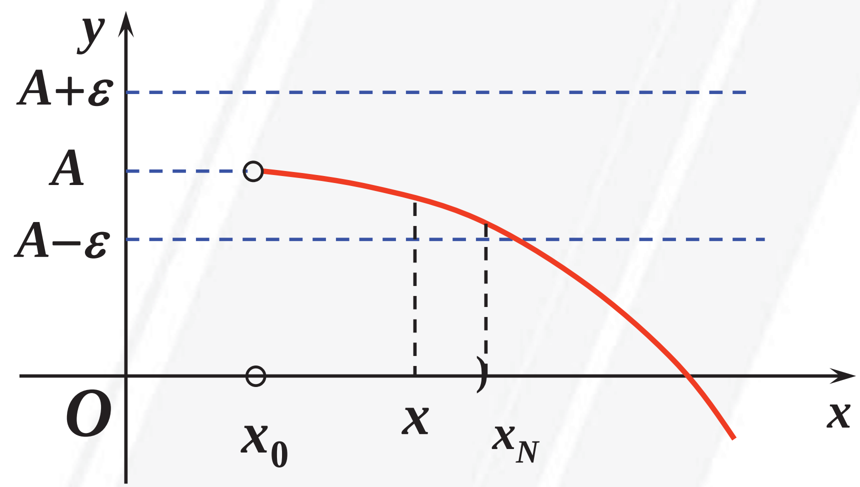
又 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 使得 $A-\varepsilon < f(x_N)$.

对于任意 $x \in U_+^\circ(x_0, x_N - x_0)$,

$$f(x) \ge f(x_N) > A - \varepsilon.$$

因此 $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$.

即 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$.



柯西收敛准则

这里仅给出 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 的柯西收敛准则，请读者自行写出其他五种极限类型的柯西收敛准则，并证明之.

定理3.11

设 $f(x)$ 在 $+\infty$ 的某个邻域 $\{x \mid x > M\}$ 上有定义，则极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在的充要条件是：任给 $\varepsilon > 0$，存在 $X\ (> M)$，对于任意 $x_1, x_2 > X$，都有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

证（必要性）设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, 则对于任意 $\varepsilon>0$,

存在 $X(>M)$, 对一切 $x>X$,

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以对一切 $x_1,x_2>X$, 有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)-A|+|f(x_2)-A|<\varepsilon.$$

（充分性） 任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $X\left(>M\right)$, $\forall\, x_1,x_2>X$, 有

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon.$$

任取 $\{x_n\}$, $x_n\to+\infty$, 则存在 N, 当 $n>N$ 时,

$x_n>X$.

又当$n,m > N$时，$x_n, x_m > X$，故

$$\left| f(x_n) - f(x_m) \right| < \varepsilon.$$

这就是说$\{ f(x_n) \}$是柯西列，因此收敛.

若存在$\{x_n\},\{y_n\}$，$x_n \to +\infty, y_n \to +\infty$，使

$$f(x_n) \to A,\quad f(y_n) \to B,\quad B \neq A,$$

令$\{z_n\}$为$x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n, \cdots$，即$\{z_{2n-1}\}$为$\{x_n\}$，$\{z_{2n}\}$为$\{y_n\}$. 显然$z_n \to +\infty$. 但$\{f(z_n)\}$发散，矛盾.

这样就证明了对于任意的$\{x_n\}$，$x_n \to +\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$存在且相等. 由归结原则，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在.

注 由柯西准则可知, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在的充要条件是 $\exists\ \varepsilon_0>0$, $\exists\ \{x_n\},\{y_n\}$, 虽然

$$x_n\to+\infty,\ y_n\to+\infty,$$

但是

$$|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon_0.$$

例如, 对于 $y=\sin x$, 取 $\varepsilon_0=1$,

$$x_n=2n\pi\to+\infty,\quad y_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty,$$

但是 $|\sin x_n-\sin y_n|=1\ge\varepsilon_0$.

这说明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在.